



# Imagerie de chargements locaux en régime de diffusion multiple

Thomas Planes

## ► To cite this version:

Thomas Planes. Imagerie de chargements locaux en régime de diffusion multiple. Sciences de la Terre. Université de Grenoble, 2013. Français. NNT : 2013GRENU025 . tel-00937217

**HAL Id: tel-00937217**

**<https://theses.hal.science/tel-00937217>**

Submitted on 28 Jan 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

## DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Sciences de la Terre, de l'Univers et de l'Environnement**

Arrêté ministériel : 7 Août 2006

Présentée par

**Thomas Planès**

Thèse dirigée par **Éric Larose**  
et codirigée par **Vincent Rossetto et Ludovic Margerin**

préparée au sein de l'**ISTerre (Institut des Sciences de la Terre)**  
et de l'**école doctorale Terre, Univers, Environnement**

# Imagerie de changements locaux en régime de diffusion multiple

Thèse soutenue publiquement le **19 Février 2013**,  
devant le jury composé de :

**Arnaud Derode**

Professeur à l'Université Paris Diderot, Institut Langevin, Paris, Rapporteur

**Dominique Gibert**

Professeur à l'IPGP, Paris, Rapporteur

**Éric Larose**

Chargé de Recherche HDR à l'ISTerre, Grenoble, Directeur de thèse

**Ludovic Margerin**

Chargé de Recherche à l'IRAP, Toulouse, Co-Directeur de thèse

**Philippe Roux**

Directeur de Recherche à l'ISTerre, Grenoble, Examineur

**Vincent Tournat**

Chargé de Recherche HDR au LAUM, Le Mans, Examineur





# Résumé

Dans les milieux fortement hétérogènes, les ondes ne se propagent pas de façon balistique. Elles peuvent interagir de nombreuses fois avec les hétérogénéités du milieu et entrer ainsi dans le régime de diffusion multiple. Dans ce régime, les méthodes classiques d'imagerie basées sur les trajets des ondes directes ou simplement diffusées sont inefficaces.

Bien que trop complexes pour être modélisées exactement, les formes d'ondes multiplement diffusées (coda) sont parfaitement reproductibles et très sensibles aux variations du milieu de propagation. Des travaux récents ont démontré la possibilité de mesurer de faibles changements de vitesse d'un milieu grâce aux ondes diffuses, à l'échelle de la croûte terrestre (coda sismique) comme à l'échelle des matériaux (coda ultrasonore). Ces travaux s'intéressent majoritairement à des changements globaux ou régionaux des différents milieux.

La problématique de cette thèse concerne la possibilité d'utiliser la coda pour étudier des changements locaux du milieu. Deux études complémentaires sont développées :

Le problème direct consiste à modéliser les variations de la coda engendrées par un changement local. Nous distinguons le cas d'un changement local de structure (fort contraste d'impédance) du cas d'un changement local de vitesse (faible contraste d'impédance).

Le problème inverse consiste à utiliser les mesures de variations de la coda pour tenter de localiser et de caractériser les changements survenus.

Les applications potentielles de ces travaux concernent entre autres le suivi temporel de structures géologiques ainsi que le contrôle non destructif de matériaux hétérogènes. Avec cet objectif, les différentes méthodes développées sont illustrées par des simulations numériques d'ondes acoustiques et sismiques ainsi que par des expériences en ultrasons dans des éléments en béton.



# Abstract

In highly heterogeneous media, waves do not propagate ballistically. They can interact several times with the heterogeneities of the medium and enter the multiple scattering regime. In this regime, classical imaging techniques, based on direct or singly scattered waves fail.

Multiply scattered waveforms (coda) are too complex for being exactly modeled, however, they are perfectly reproducible and very sensitive to small variations of the medium. Recent works demonstrated the possibility of measuring small velocity variations with diffuse waves, either at the geophysical scale (seismic coda) or at the material scale (ultrasonic coda). These works are mainly focused on monitoring global or regional changes of the medium.

The present thesis deals with the possibility of using coda waves to study local changes of the medium. Two complementary studies are developed :

The forward problem addresses the modeling of the coda variations generated by a local change. We distinguish the case of a structural change (strong impedance contrast) from the case of a velocity change (small impedance contrast).

The inverse problem consists in using the coda variations measurements to locate and characterize the changes that occurred.

Potential applications may concern, among others, monitoring of geological structures and non-destructive testing of heterogeneous materials. This in mind, we illustrate the different studies with numerical simulations of acoustic and seismic waves and with ultrasound experiments in concrete blocks.



# Merci !

...aux membres du Jury, particulièrement aux rapporteurs Arnaud Derode et Dominique Gibert pour leur lecture attentive du manuscrit ainsi qu'aux examinateurs Vincent Tournat et Philippe Roux pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

...à mes trois directeurs de thèse, Eric Larose, Vincent Rossetto et Ludovic Margerin. Leurs compétences complémentaires, leur disponibilité et leur soutien ont été essentiels au bon déroulement de cette thèse.

...aux membres de l'équipe Ondes et structures pour les échanges scientifiques, en particulier à Anne Obermann, Bérénice Froment et Michel Campillo pour les collaborations.

...à Christoph Sens-Schönfelder, pour les différentes interactions scientifiques et collaborations.

...à Odile Abraham, Olivier Durand et Yuxiang Zhang pour leur accueil à l'IFSTTAR de Nantes et les manip « béton » !

...à Claude Rospars et Gautier Moreau de nous avoir permis de participer à l'expérience RL7 du projet CEOS.

...aux nombreuses personnes qui m'ont apporté leur aide sur un plan technique, notamment Julien Lopez-Rios, Jérôme Lachèvre, Adeline Richard et Raphaël Jacquot. Je leur dois le bon fonctionnement de mes expériences.

...à l'équipe informatique et à l'équipe administrative, qui ont contribué à ce que cette thèse se déroule dans de bonnes conditions.

...aux étudiants du labo, pour la bonne ambiance générale, les tuyaux Matlab, les pauses « Mel'Crok », et le reste !

...à ma famille et mes proches, et tout particulièrement Anne, pour leur soutien essentiel tout au long de cette thèse.





# Table des matières

<b>I</b>	<b>Problématique et état de l'art</b>	<b>13</b>
<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>15</b>
1.1	Longueurs caractéristiques et régimes de propagation . . . . .	16
1.2	La coda sismique . . . . .	19
1.3	Plan du manuscrit . . . . .	20
<b>2</b>	<b>La coda pour contrôler le béton : État de l'art</b>	<b>23</b>
2.1	Introduction . . . . .	23
2.1.1	Ultrasound to probe concrete . . . . .	23
2.1.2	The four frequency domains of US in concrete . . . . .	24
2.1.3	Focus on the multiple scattering regime and US coda waves . . .	26
2.1.4	Sensitivity of coda waves to weak changes . . . . .	27
2.2	CWI data processing . . . . .	29
2.3	Application of CWI to thermal changes . . . . .	29
2.4	Application of CWI to acousto-elasticity . . . . .	30
2.4.1	Application to monitoring stress changes . . . . .	31
2.4.2	Application to monitoring damage . . . . .	31
2.5	Conclusion et perspectives . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Éléments théoriques et transport en diffusion multiple</b>	<b>35</b>
3.1	Équation d'onde et fonctions de Green en milieu homogène . . . . .	36
3.1.1	Équation d'onde et fonctions de Green . . . . .	36
3.1.2	Solutions en milieu homogène . . . . .	37
3.2	Fonctions de Green en milieu hétérogène . . . . .	39
3.2.1	Développement perturbatif . . . . .	40
3.2.2	Cas d'un diffuseur unique . . . . .	41
3.2.3	Diffusion multiple et milieu effectif . . . . .	46
3.3	Description de l'intensité . . . . .	50
3.4	Équations et solutions du transport . . . . .	53
3.4.1	Le régime diffusif . . . . .	53
3.4.2	Équation du transfert radiatif . . . . .	55

<b>II</b>	<b>Effet d'un changement local sur la coda : Le problème direct</b>	<b>61</b>
<b>4</b>	<b>Expériences introductives en ultrasons</b>	<b>63</b>
4.1	Protocole générique d'acquisition des ultrasons . . . . .	63
4.2	Expérience 1 : Détection de changement local . . . . .	64
4.2.1	Protocole de l'expérience . . . . .	64
4.2.2	Traitement des données . . . . .	65
4.2.3	Résultats et discussion . . . . .	65
4.3	Expérience 2 : Dépendance spatiale et temporelle de la décorrélation . . .	68
4.3.1	Protocole de l'expérience . . . . .	68
4.3.2	Traitement des données et résultats . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Changement local de structure</b>	<b>73</b>
5.1	Estimation théorique de la décorrélation . . . . .	73
5.1.1	Défaut de faible section efficace . . . . .	76
5.1.2	Défaut de section efficace importante . . . . .	79
5.2	Noyau de sensibilité . . . . .	81
5.2.1	Noyau en diffusion . . . . .	81
5.2.2	Noyau en transfert radiatif . . . . .	84
5.3	Simulations numériques . . . . .	89
5.3.1	Protocole des simulations . . . . .	89
5.3.2	Sections efficaces de diffuseurs mous . . . . .	90
5.3.3	Étude de l'intensité, l'enveloppe de la coda . . . . .	93
5.3.4	Étude de la décorrélation . . . . .	96
5.3.5	Milieux quelconques et matrices de transfert . . . . .	99
<b>6</b>	<b>Changement local de vitesse</b>	<b>105</b>
6.1	Estimation théorique du déphasage . . . . .	105
6.1.1	Défaut de vitesse ponctuel . . . . .	107
6.1.2	Défaut de vitesse étendu . . . . .	109
6.2	Sensibilité de la coda sismique à des changements en profondeur . . . . .	111
6.2.1	Introduction . . . . .	112
6.2.2	Numerical simulations . . . . .	113
6.2.3	Modeling the two sensitivity kernels . . . . .	120
6.2.4	Model for the depth sensitivity . . . . .	124
6.2.5	Conclusion . . . . .	130
<b>III</b>	<b>Imagerie : Le problème inverse</b>	<b>133</b>
<b>7</b>	<b>Localiser un changement unique</b>	<b>135</b>
7.1	Méthode d'inversion . . . . .	135
7.1.1	Test du $\chi^2$ . . . . .	136
7.1.2	Inférence bayésienne et carte de probabilité . . . . .	137

7.2	Application du $\chi^2$ aux simulations numériques . . . . .	139
7.3	Application expérimentale du $\chi^2$ . . . . .	144
7.4	Limites de la méthode . . . . .	150
<b>8</b>	<b>Localiser plusieurs changements simultanés</b>	<b>153</b>
8.1	RL7 : Une expérience à « taille réelle » . . . . .	153
8.1.1	Objectifs . . . . .	153
8.1.2	Protocole expérimental . . . . .	154
8.1.3	Résultats . . . . .	155
8.1.4	Discussion . . . . .	157
8.1.5	Conclusion . . . . .	160
8.2	Inversion de changements simultanés . . . . .	162
8.2.1	Nouvelle formulation du problème direct . . . . .	163
8.2.2	Inversion linéaire au sens des moindres carrés . . . . .	164
8.3	Application aux simulations numériques . . . . .	166
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>173</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>173</b>
<b>A</b>	<b>Propriétés utiles et intégrales de boucles</b>	<b>185</b>
A.1	Propriétés utiles . . . . .	185
A.2	Intégrales de boucles . . . . .	187



## Première partie

### Problématique et état de l'art



# Chapitre 1

## Introduction

Dans une multitude de domaines, les ondes constituent un outil essentiel pour sonder un milieu donné. La notion d'onde, qui traduit la propagation d'une perturbation, recouvre une grande variété de phénomènes physiques, de natures très diverses et à différentes échelles. En radiologie médicale, des ondes électromagnétiques de longueurs d'ondes nanométriques (rayons X) sont utilisées pour imager les tissus osseux du patient. En contrôle non destructif, des ondes mécaniques de longueurs d'ondes millimétriques (ultrasons) permettent de détecter et de localiser des zones d'endommagement dans les aciers. Enfin, en géophysique, les ondes sismiques de longueurs d'ondes kilométriques permettent par exemple de sonder la structure interne de la terre, ou de localiser l'épicentre d'un séisme.

Comme dans les exemples cités, la majorité des méthodes classiques d'imagerie reposent sur l'utilisation de trajets balistiques de l'onde. Cela suppose que l'onde se propage dans un milieu relativement homogène, comprenant un nombre faible de réflecteurs ou discontinuités à imager. Or une grande partie des milieux naturels ou artificiels sont hétérogènes à une ou plusieurs échelles. La validité de l'hypothèse de propagation balistique dépend en fait du rapport entre la longueur d'onde  $\lambda$  et la taille typique  $a$  des hétérogénéités dont le milieu est constitué ainsi que de la longueur des trajets considérés.

Lorsqu'une onde rencontre une hétérogénéité dont la taille  $a$  est du même ordre de grandeur que sa longueur d'onde  $\lambda$ , celle-ci est diffractée dans différentes directions. Si la longueur d'onde est largement supérieure à la taille de l'objet ( $\lambda \gg a$ ), la diffraction est moindre. Ce phénomène est appelé diffusion<sup>1</sup> et l'hétérogénéité prend le nom de diffuseur. Dans un milieu hétérogène, ce phénomène peut se produire un grand nombre de fois entre la source (point d'émission de l'onde) et le récepteur (point d'enregistrement). On parle alors de diffusion multiple.

Dans certaines situations, la diffusion multiple est imposée par le système étudié.

---

1. En français, le mot diffusion désigne à la fois ce phénomène d'interaction avec un défaut unique et le processus global de diffusion (particules, chaleur, ondes...) qui résulte pour les ondes d'un grand nombre d'interactions avec les hétérogénéités du milieu. Cette ambiguïté n'existe pas en anglais où le processus unique s'appelle « scattering » et le processus global « diffusion ».



C'est le cas lorsqu'on enregistre la réponse à une source naturelle située au cœur d'un milieu complexe (méthode passive). Dans d'autres situations, la diffusion multiple devient inévitable si l'on veut augmenter la sensibilité d'une mesure. C'est le cas en imagerie active, si l'on souhaite détecter un défaut de taille analogue ou plus petite que la taille typique des hétérogénéités constituant le milieu.

L'étude de la propagation des ondes en milieu désordonné est ainsi motivée par différentes problématiques :

- Comment caractériser la source, ou l'onde incidente, à partir de l'onde transmise à travers un milieu hétérogène ? C'est une problématique récurrente en astrophysique où le rayonnement des astres est altéré par la traversée de nuages interstellaires (Hulst, 1980).
- Comment prévoir et modéliser la propagation des ondes dans un milieu aux caractéristiques connues. Cette question se pose par exemple pour décrire le transport des électrons (ondes de matière) dans les métaux et caractériser leur résistivité à basse température.
- À l'inverse, comment caractériser un milieu inconnu à partir d'ondes diffusées ? C'est la problématique générale de l'imagerie, commune entre autres au domaine médical, à la sismologie et au contrôle des matériaux.

La réponse à ces questions dépend bien sûr du degré d'hétérogénéité du milieu étudié, qui peut être quantifié par la comparaison de différentes longueurs caractéristiques. Les relations d'ordre entre ces longueurs peuvent donner lieu à des régimes de propagation très différents.

### 1.1 Longueurs caractéristiques et régimes de propagation

En plus de la longueur d'onde  $\lambda$  et de la taille typique  $L$  du milieu étudié, trois grandeurs permettent de caractériser la propagation des ondes classiques en milieu désordonné :

- La longueur d'absorption  $\ell_a$  est la distance typique après laquelle l'onde a été significativement atténuée par un processus anélastique<sup>2</sup>.
- Le libre parcours moyen  $\ell$  s'interprète comme la distance moyenne entre deux événements de diffusion. En l'absence d'absorption, c'est la distance typique d'atténuation de l'onde incidente. En milieu dilué, on peut le relier à la section efficace  $\sigma$  des diffuseurs,  $\ell = \frac{1}{n\sigma}$ ,  $n$  étant le nombre de diffuseurs par unité de volume.
- Le libre parcours moyen de transport  $\ell^*$  s'interprète comme la distance que doit parcourir l'onde pour perdre la mémoire de sa direction de propagation incidente

---

2. Cette atténuation est également appelée atténuation intrinsèque.

(Lagendijk et Van Tiggelen, 1996). Lorsque les diffuseurs du milieu sont petits ( $a \ll \lambda$ ), la diffusion est isotrope et l'on a  $\ell = \ell^*$ . Si les diffuseurs sont plus grand ( $a \approx \lambda$ ), la diffusion est fortement piquée vers l'avant (direction incidente) et  $\ell^* > \ell^3$ .

Dans des milieux où l'absorption est suffisamment faible, on peut délimiter trois principaux régimes de propagation très différents, par degré de désordre croissant :

- Le régime de diffusion simple :  $\lambda < L \leq \ell, \ell^* < \ell_a$ . La longueur d'onde est plus petite que la taille typique du milieu, elle-même plus petite ou de l'ordre du libre parcours moyen. L'onde interagit très peu avec les hétérogénéités du milieu, c'est le régime de validité des méthodes classiques d'imagerie. Si la longueur d'onde atteint la taille typique du milieu, les vibrations correspondent aux modes propres de la structure (ondes stationnaires).
- Le régime de diffusion multiple :  $\lambda < \ell, \ell^* < L < \ell_a$ . Quand le libre parcours moyen est plus petit que la structure, les ondes interagissent de nombreuses fois avec le milieu. L'onde incidente est très atténuée, voire invisible et l'enregistrement est dominé par des arrivées successives d'ondes diffuses. Les méthodes classiques d'imagerie, basées sur les trajets balistiques de l'onde, ne sont plus utilisables.
- La localisation forte :  $\ell \leq \lambda$ . Si le libre parcours moyen diminue encore, pour s'approcher de la longueur d'onde, les ondes deviennent « prisonnières » du désordre et l'énergie ne se propage plus. Ce phénomène, découvert à l'origine par Anderson (1958) dans un contexte de physique quantique, a également été observé pour les ultrasons (Hu *et al.*, 2008).

Les méthodes d'imagerie en régime de diffusion simple ont largement fait leurs preuves, et ce dans de nombreux domaines. En imagerie médicale par exemple, l'échographie permet de sonder certains organes du corps humain à l'aide d'ultrasons. La sonde est constituée de plusieurs dizaines voire centaines de transducteurs piézoélectriques, qui peuvent tour à tour servir de source et de récepteur. L'hypothèse de base de la méthode est que les signaux enregistrés sont issus d'une interaction unique de l'onde incidente avec les hétérogénéités du milieu (Figure 1.1). Une deuxième hypothèse est que le milieu est constitué d'une matrice de vitesse uniforme comprenant un certain nombre de réflecteurs ou diffuseurs à imager. Les temps d'arrivées des différents échos sont alors directement reliés à la position des hétérogénéités et l'on peut construire une carte de réflectivité du milieu.

En imagerie sismique, le principe reste le même mais une étape préliminaire est nécessaire. La vitesse des ondes dans le sous-sol ne peut pas être considérée comme uniforme à cause des variations physiques (pression, température) et chimiques survenant en profondeur. L'étude des ondes de surface et/ou des ondes réfractées permet dans un premier temps d'obtenir un modèle approximatif de vitesse en fonction de la profondeur. Ensuite, en prenant en compte ce modèle de vitesse, il est possible de construire une carte

---

3. Ces grandeurs seront définies de manière plus rigoureuse dans le chapitre 3.

de réflectivité du milieu, similairement au procédé échographique. Cette carte permet principalement de localiser les interfaces entre les différentes couches géologiques du sous-sol. Elle peut ensuite permettre aux géologues des compagnies pétrolières d'estimer la probabilité de trouver du pétrole.

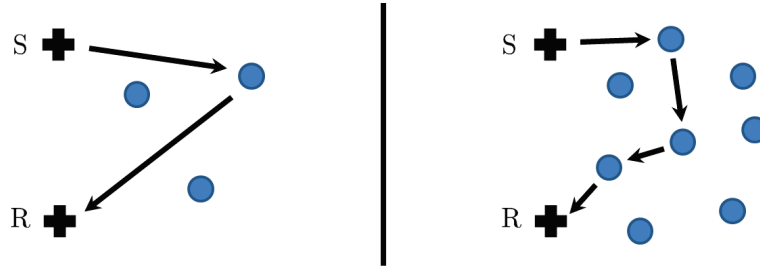


FIGURE 1.1 – Représentation schématique du régime de diffusion simple (à gauche) et du régime de diffusion multiple (à droite).

Mais si le degré d'hétérogénéité du milieu étudié est trop important, les ondes incidentes peuvent subir plusieurs diffusions avant d'atteindre le récepteur (Figure 1.1). L'équivalence entre temps d'arrivée et position d'un diffuseur est perdue et l'utilisation des méthodes classiques d'imagerie n'est plus possible.

Dans ce régime, la propagation d'onde s'apparente à une marche aléatoire et l'intensité est gouvernée par l'équation de diffusion. Les propriétés ondulatoires de l'onde semblent avoir disparu pour laisser place à une interprétation classique comparable au transport des particules. La perte apparente des propriétés ondulatoires ainsi que l'inadéquation avec les méthodes d'imagerie ont sûrement contribué au démarrage tardif de l'étude approfondie de ce régime. C'est la découverte de phénomènes d'interférences, comme la localisation forte, qui a relancé dans les années 50 l'intérêt des physiciens du solide pour l'étude des ondes dans les systèmes désordonnés.

Ce regain d'intérêt pour les systèmes désordonnés a également suivi dans différents domaines qui impliquent la propagation d'ondes classiques. Parmi les phénomènes étudiés actuellement, certains ont un lien fort avec la diffusion multiple et s'appliquent à différentes échelles. On peut citer par exemple les corrélations de bruit ambiant (Lobkis et Weaver, 2001; Campillo et Paul, 2003), le retournement temporel (Derode *et al.*, 1995), ou encore la localisation faible (Albada et Lagendijk, 1985; Larose *et al.*, 2004).

**C'est ce régime de diffusion multiple qui constitue le cadre de ce travail de thèse. Si les travaux présentés dans ce manuscrit peuvent s'appliquer à tous types d'ondes classiques, ils seront illustrés par des simulations numériques d'ondes acoustiques et sismiques, et par des expériences en ultrasons dans le béton.**

Avant d'introduire la problématique à l'étude, commençons par rappeler brièvement les travaux déjà effectués à l'aide d'ondes sismiques multi-diffusées.

## 1.2 La coda sismique

La croûte terrestre est un milieu qui présente des hétérogénéités à différentes échelles. Les structures sédimentaires sont par exemple constituées de différentes couches, et les ondes sismiques peuvent subir de nombreuses réflexions et réfractions sur les différentes interfaces. Des hétérogénéités sont également présentes dans les régions volcaniques ou dans les zones de failles actives. Dans cette partie superficielle de la terre, les ondes peuvent être simplement ou multiplement diffusées entre leur émission (séisme) et leur enregistrement. Ce phénomène a été questionné dès la fin des années 60 par Aki (1969). Par analogie avec la fin d'un morceau de musique, le terme coda a été choisi pour décrire la partie tardive des sismogrammes, située après les arrivées des ondes directes (Figure 1.2).

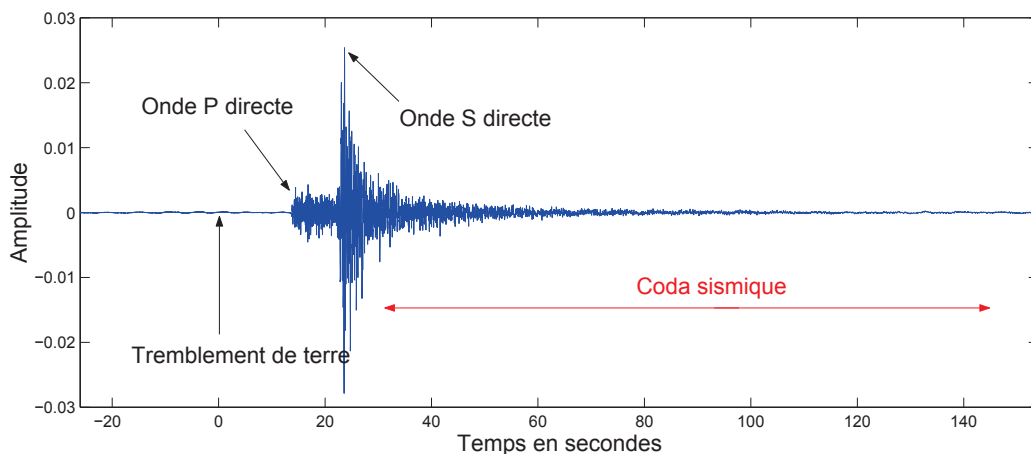


FIGURE 1.2 – Exemple de sismogramme généré par un séisme situé à 90km. On distingue les arrivées directes des ondes P et S puis la série décroissante d'arrivées tardives qui forment la coda <sup>4</sup>.

La complexité des trajets des ondes de la coda empêche toute prédiction exacte du sismogramme. Considérée comme inutile pour l'imagerie et dénuée d'information exploitable, l'étude de la coda est restée limitée jusqu'au milieu des années 80. Celle-ci a probablement été initiée par Aki et Chouet (1975), qui ont montré que la décroissance de la coda était caractéristique d'une région donnée, indépendamment de la magnitude du séisme ou de la distance de propagation considérée.

Les ondes de la coda se propagent beaucoup plus longtemps que les ondes directes et leur enregistrement constitue une empreinte caractéristique de l'état du milieu à une date donnée. Elle est parfaitement reproductible tant que le milieu et la source restent inchangés. Cette propriété a naturellement fait de la coda un outil idéal pour détecter et mesurer des changements faibles du milieu. Des mesures de variation de la coda ont été appliquées aux zones de failles (Poupinet *et al.*, 1984; Brenguier *et al.*, 2008b; Niu *et al.*, 2008), aux volcans (Poupinet *et al.*, 1996; Snieder et Hagerty, 2004; Sens-Schönfelder et

4. Figure issue de la thèse de Renaud Hennino (non soutenue).

Wegler, 2006), aux réservoirs (Meunier *et al.*, 2001), et même à la lune (Sens-Schönfelder et Larose, 2010).

Les milieux évoqués ont tous en commun un très fort degré d'hétérogénéité. Si cette propriété atténue fortement les ondes directes et invalide les méthodes de mesure classiques, elle renforce les ondes diffuses et accroît la sensibilité des mesures basées sur la coda. Le milieu joue en quelque sorte le rôle d'un interféromètre naturel et les mesures de variations de vitesse dans la coda se sont répandues sous le nom générique de Coda Wave Interferometry, suite aux travaux de Snieder *et al.* (2002) et Snieder (2006).

Ce terme de Coda Wave Interferometry a été repris par la suite dans d'autres disciplines pour nommer l'utilisation d'ondes multi-diffusées à des fins de « surveillance » d'un milieu<sup>5</sup>. À l'échelle des ultrasons, le béton est un exemple typique de matériau très hétérogène. Constitué de sables et de graviers agglomérés par du ciment, ses hétérogénéités s'étendent de quelques micromètres à quelques centimètres. Une revue des travaux de contrôle du béton à l'aide de la coda ultrasonore fera l'objet du chapitre suivant.

À ce jour, quelle que soit la discipline, les études se focalisent majoritairement sur l'estimation du changement global de vitesse s'opérant dans le milieu. Les ondes empruntent des trajets complexes et les mesures dans la coda donnent en effet une estimation moyennée spatialement de la variation réelle de vitesse qui se produit.

Une question qui se pose alors est la possibilité d'étudier des changements locaux se produisant dans le milieu. En sismologie, des premiers travaux de régionalisation de changement de vitesse ont été effectués par Brenguier *et al.* (2008a) et Duputel *et al.* (2009). Dans sa thèse, Froment (2011) propose également une méthode d'inversion de changement de vitesse associé au séisme du Wenchuan<sup>6</sup>.

**La problématique de ce travail de thèse est centrée sur l'utilisation de la coda sismique et ultrasonore pour l'étude de changements locaux du milieu. Peut-on les détecter ? Si oui, peut-on les localiser, les caractériser ?**

Les différents axes de recherche suivis durant la thèse sont exposés à la section suivante.

### 1.3 Plan du manuscrit

Pour commencer, nous passons en revue les récents travaux de « contrôle » du béton basés sur l'étude de la coda ultrasonore (chapitre 2).

Nous rappelons ensuite un certain nombre d'éléments théoriques et de résultats concernant le régime de diffusion multiple (chapitre 3).

---

5. Pour étudier les milieux où le désordre n'est pas figé, on utilise plutôt les méthodes de Diffusing (Acoustic) Wave Spectroscopy (Pine *et al.*, 1988; Cowan *et al.*, 2002)

6. Le 12 mai 2008, ce séisme de magnitude 7.9 a causé la mort de plus de 80000 personnes dans la région du Sichuan en Chine.

Nous présentons ensuite deux expériences qualitatives pour illustrer la sensibilité de la coda ultrasonore à un changement local du milieu (chapitre 4).

Nous utilisons alors les outils théoriques introduits précédemment pour estimer la décorrélation des ondes de la coda induite par un changement local de « structure » dans le milieu (fort contraste d'impédance). Ces estimations théoriques sont également confrontées à des simulations numériques en différences finies, dans différentes configurations (chapitre 5).

Dans le cas où le changement local est une faible variation de vitesse, l'effet induit sur les ondes de la coda s'apparente principalement à un déphasage. En utilisant les développements du chapitre 5, nous estimons théoriquement la valeur de ce déphasage pour retomber sur un modèle déjà connu (Pacheco et Snieder, 2005). Ce modèle est appliqué à l'étude de la sensibilité de la coda sismique (simulations numériques), dans le cadre d'un travail collaboratif (chapitre 6).

Nous abordons ensuite le problème inverse, qui consiste à localiser les changements locaux du milieu à partir des mesures de variations dans la coda. Nous commençons par développer une méthode d'inversion capable de localiser un changement local unique. Cette méthode est testée sur des simulations numériques ainsi que sur une expérience de laboratoire sur un bloc de béton (chapitre 7).

Pour finir, en se confrontant à une expérience « réaliste » sur un élément en béton de 15 tonnes, nous soulignons la nécessité de développer une méthode d'inversion plus robuste, capable de résoudre l'apparition de plusieurs changements simultanés dans le milieu. Nous modifions alors la formulation du problème direct et nous adaptons un schéma d'inversion linéaire au sens des moindres carrés. Cette méthode d'inversion est enfin testée sur des données issues de simulations numériques (chapitre 8).



# Chapitre 2

## La coda pour contrôler le béton : État de l'art

Nous présentons ici une version allégée d'un travail de revue récemment soumis au journal *Cement and Concrete Research*.

### A review of ultrasonic Coda Wave Interferometry in concrete

Thomas Planès and Eric Larose

#### **Abstract :**

Concrete is a multi-composite material with heterogeneities ranging from micrometers to centimeters. At low frequency (below 50 kHz), ultrasound propagates without suffering from scattering and absorption. On the contrary, above  $\approx 100$  kHz, the waves strongly interact with all the heterogeneities and enter the multiple scattering regime. This regime induces 1) a strong attenuation of coherent waves (direct waves and ballistic echoes), a feature that disables most conventional imaging techniques; 2) the onset of late arrival signals constituting the ultrasonic coda. An important feature of coda waves is their very high sensitivity to weak changes in the medium. Over the last years Coda Wave Interferometry applied to ultrasound in concrete has undergone a large dissemination in the non-destructive testing community. We review several applications relying on a precise processing of the ultrasonic coda, in the case of thermal and/or stress and/or damage changes.

## 2.1 Introduction

### 2.1.1 Ultrasound to probe concrete

Among all available techniques for evaluating and testing engineered materials, especially concrete, those employing mechanical waves, either sonic or ultrasonic (US),



are particularly attractive (see for instance the review of McCann et Forde (2001)). US techniques are non-destructive, non-hazardous, they can be operated on-site, and they are naturally highly sensitive to the mechanical properties of the material at test. In a pitch-catch configuration, the velocity associated to compressional (longitudinal) or shear (transverse) waves is easily deduced from the distance separating the transducers, and from the time-of-flight of the ultrasonic impulse propagating between them. As compressional and shear velocities directly depend on the elastic moduli (Lamé coefficients), estimating the velocity of ultrasound gives many indications on the mechanical properties of the material (Anderson et Nerenst, 1952; Komlos *et al.*, 1996), including (among others) its rigidity (Anderson et Seals, 1981), its state of stress (Lillamand *et al.*, 2010), its level of chemical damage (Naffa *et al.*, 2002) or mechanical damage (Berthaud, 1991). In pulse-echo configurations, one can image major discontinuities associated to significant impedance contrast (or mismatch) in concrete, including large cracks, cavities, large pieces of steel...

The general idea with US techniques is that one gets a better spatial resolution with increasing frequencies. Nevertheless, attenuation also considerably increases with frequency, such that the effective range allowed for US inspection is limited (Popovics et Rose, 1994). Attenuation relates to two distinct physical phenomena : 1) scattering, and 2) intrinsic absorption. In the first case, the pieces of information contained in the ultrasonic impulse response are transformed into a complex collection of late waveforms. In the latter they are simply canceled. The present article focuses on the first phenomenon that occurs in the so-called "mesoscopic regime" of US in concrete. Let's review the different regimes of propagation of mechanical waves in concrete. There exist mainly four different regimes that are defined for four consecutive frequency ranges.

### 2.1.2 The four frequency domains of US in concrete

**The low frequency range and the stationary wave regime :** At frequency lower than 20 kHz, in the seismic and audible range, the wavelength  $\lambda$  is greater or of the order of the macroscopic size of the structure  $L$  :

$$\lambda > L. \quad (2.1)$$

In that case only stationary waves are excited, corresponding to vibrational eigenmodes of the structure. This is the frequency range of structural health monitoring and modal analysis, techniques that are easily operated but find limited sensitivity to local and/or microscopic features and poor resolution to locate the defects.

**The standard US frequency range and the single scattering regime :** The next frequency range is the standard range for ultrasonic testing of concrete. In this domain, the wavelength  $\lambda$  is smaller than the structure, but larger than the size of the heterogeneities  $d$ . Concrete is indeed a multi-composite material made of a micrometric cement paste aggregating millimetric sand and centimetric gravel. When the ultrasonic

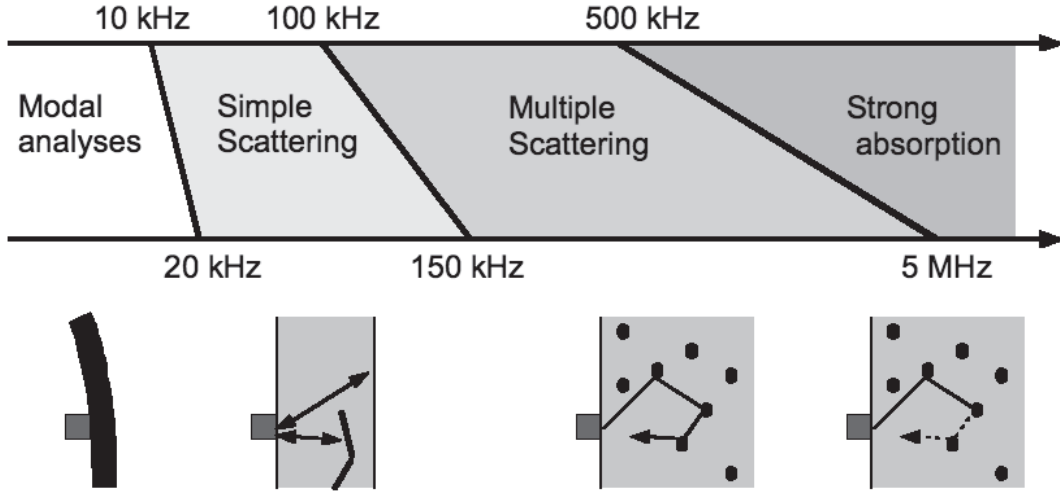


FIGURE 2.1 – The frequencies limiting the different domains are given with large uncertainties, since the transition from one regime to another is smooth and depends largely on the constitution of the concrete mix.

wavelength  $\lambda$  is much larger than these lengths, the sound interacts weakly with the heterogeneities and the propagation follows the Born (or single scattering) approximation. Also, if absorption is weak, which means that the intrinsic absorption characteristic length  $\ell_a$  is larger than the size  $L$  of the specimen at test, we fall in the regime where most conventional imaging procedure can be operated :

$$d < \lambda < L < \ell_a \quad (2.2)$$

The absorption length also defines the depth penetration of ultrasound, and is well known to depend on frequency : the higher the frequency, the stronger the attenuation. On the one hand, gaining sensitivity and resolution requires higher frequencies. On the other hand, getting good signal-to-noise ratio in the waveforms and limited attenuation requires avoiding high frequencies. Both trends tend to equilibrate in the 20 kHz-150 kHz frequency range, as defined in many standards<sup>1</sup>.

**The mesoscopic frequency range and multiple scattering regime :** For ultrasonic wavelengths shorter than the size of the heterogeneities, the wave can see the heterogeneities several times before reaching the detector. We define the distance between two scattering events as the scattering mean free path  $\ell$ . If, again, intrinsic absorption  $\ell_a$  is weak enough, wave propagation falls into the multiple scattering regime :

$$\lambda < d \leq \ell < L < \ell_a \quad (2.3)$$

Assuming that heterogeneities in concrete are dominated by centimetric gravels, this regime is attained for wavelength shorter or of the order of the centimeter, at frequencies

1. See for instance the International Organization for Standardization 1920-7.

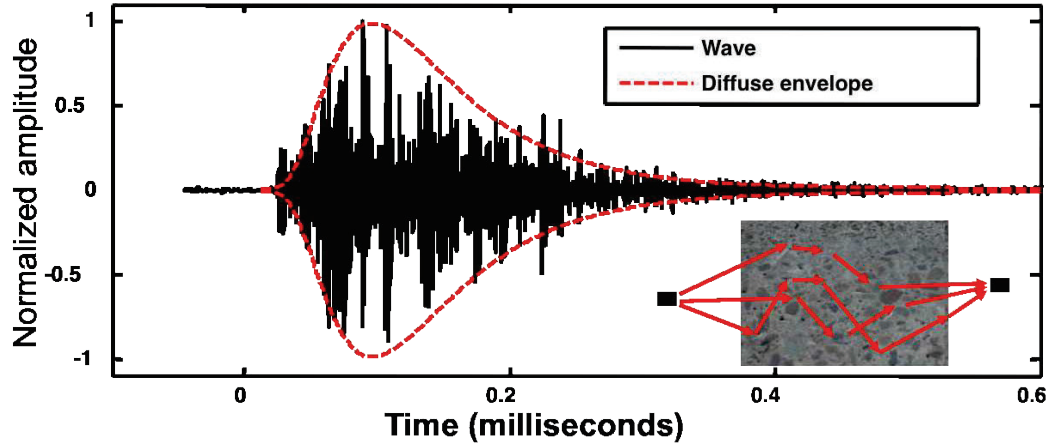


FIGURE 2.2 – Example of an US impulse response (black continuous line) obtained across 20 cm of concrete around 500 kHz. The direct wave is strongly attenuated, and followed by a series of strong random arrivals constituting the US coda. The envelope of these arrivals is well described by the diffusion equation (red dashed line). The inset mimics multiply scattered paths in concrete.

higher than about 100 kHz. In most practical cases, intrinsic absorption starts to have major effects above roughly 1 MHz, thus the frequency range of 150 kHz-1 MHz defines the multiple scattering regime. It is important to note that the frequencies limiting the different domains are given with large uncertainties, since the transition from one regime to another is smooth. In the multiple scattering regime, the waves bounce randomly on several heterogeneities before reaching the receiver, and wave trajectories show random characteristic such that conventional imaging procedures fail. Nevertheless the so-called US coda waves, corresponding to multiply scattered paths, are perfectly reproducible and deterministic. Transforming the random-like waveforms constituting the US coda into pieces of information relevant to non-destructive testing is a real challenge. This regime will be further developed in this paper.

**The attenuation regime :** At frequencies higher than 1 MHz, US are very hard to observe on large length scales. This is due to the combination of scattering attenuation and intrinsic absorption. In this last domain, US technique might be operated on small size laboratory samples but hardly on-site.

### 2.1.3 Focus on the multiple scattering regime and US coda waves

As scattering strongly affects the amplitude of direct (or ballistic) waves, scattering is often considered to reduce the depth penetration of ultrasound. Nevertheless, scattering

effects have to be differentiated from intrinsic absorption : energy here is not dissipated (and transferred to heat) but translated in later, randomly arriving waveforms. The diffusion (or multiple scattering) regime that occurs above 100 kHz can be characterized by the following features (Anugonda *et al.*, 2001) (see Fig. 2.2) :

- The direct wave is highly attenuated (sometimes no more visible).
- Conventional imaging techniques, based on direct or single scattering assumptions fail.
- Onset of late arrivals constituting the so-called US coda.

The word *coda* has been inherited from the seismological community, where it refers to the tail of the seismograms after an earthquake (Aki et Chouet, 1975). These late arrivals are constituted by the interferences of various waves trajectories (see inset of Fig. 2.2). Because of the complexity of the material, it is hardly possible to describe in details the phase and amplitude of coda waves, which might appear as the result of a random process. Nevertheless, coda waves are perfectly reproducible. Also, contrary to the unpredictability of the waveforms, the average intensity  $I(r, t)$  of the wave can be easily modeled, for instance by the diffusion equation. In 3D infinite space, the solution of the diffusion equation takes the simple form of :

$$I(r, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4Dt}}, \quad (2.4)$$

where  $D$  is the diffusivity and  $r$  is the source-sensor distance. The first work to present quantitative estimations of multiple scattering process in concrete (Anugonda *et al.*, 2001; Becker *et al.*, 2003) reported diffusivities ranging from  $\approx 40 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$  at 100 kHz,  $\approx 20 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$  at 200 kHz to  $\approx 5 - 10 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$  at 1 MHz. Since the diffusivity depends on the grain size, on the grain concentration, and on the impedance contrast between the grains and the cement paste, the diffusion constant can significantly vary from one composition of concrete to another. Nevertheless a large amount of independent experiments reported on US diffusivities of similar order of magnitude.

#### 2.1.4 Sensitivity of coda waves to weak changes

A considerable advantage of coda waves is their very high sensitivity to weak perturbations in the medium. Imagine, for instance, an experiment where sources and receivers have fixed locations, while a small mechanical change occurs inside the complex material at test. Since multiply scattered waves spend much longer time in the material than direct waves, they accumulate the signature of the very small change along their propagation. Thus, a change that is undetected by first arrivals becomes visible in the coda. Poupinet *et al.* (1984) first investigated the effect of a small velocity change on seismic coda waves. They used seismic doublets, which are earthquakes occurring at the same place, with the same mechanism, but at different dates, to demonstrate that small variations occurring in the earth crust between the two seismic events are detectable. The main effect of a limited velocity change is to stretch the time axis of the record. The

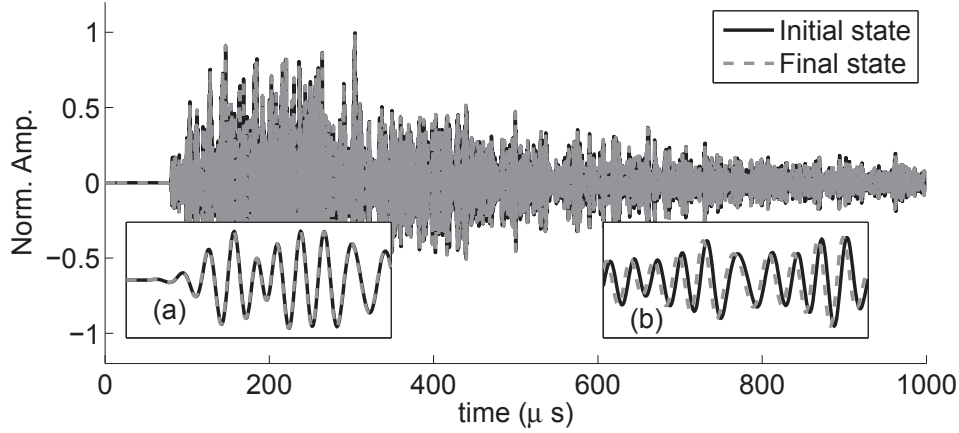


FIGURE 2.3 – Numerical simulation of US coda waves in concrete. The source is a 500 kHz,  $2\mu s$ -long, broadband impulse. The waveforms  $\varphi(t)$  in the initial state, and  $\varphi'(t)$  in the final state, only differ from a stretching of the time-axis. The stretching factor corresponds to the relative velocity change  $dV/V$  between the two states. The change is not visible around the direct wave (a) but clearly visible in the coda (b) around  $800\mu s$ .

time-delay between the initial and the final record is longer in the coda than around the first arrival.

Thanks to their seminal paper, Snieder *et al.* (2002) gave a strong push to the use of seismic and US coda waves to monitor weak velocity changes in solids. The simple theoretical picture behind their processing is that any diffuse record  $\varphi(t)$  is the superposition of wave packets arriving with random time  $t_i$  and random amplitude  $A_i$ . Thus, the effect of a global relative velocity change  $dV/V$  is to delay each wave packet by an amount of time proportional to the relative velocity change :

$$\varphi(t) = \sum_i A_i s(t - t_i) \rightarrow \varphi'(t) = \sum_i A_i s(t - t_i + \frac{dV}{V}t) \quad (2.5)$$

where  $s(t)$  is the pulse initially sent by the source. Note that the travel time change along each wave path is independent of the wave trajectory but only depends linearly on the time in the coda. This simple model assumes that 1) the relative velocity change is homogeneous in the medium, and 2) the amplitude of the wave packets  $A_i$  does not change. The second assumption is actually a first order approximation that has been studied in depth by Lobkis et Weaver (2003). As a simple illustration, Fig. 2.3 shows two synthetic US coda obtained in a concrete-like medium after a 500 kHz broadband US pulse source. To mimic the gravels, we place a myriad of rigid scatters in the simulation. Between the two acquisitions, the background velocity has increased by only  $dV/V = 0.02\%$ . Such a tiny change is not visible with direct waves (inset (a) of Fig. 2.3) but clearly measurable in the late coda (inset (b) of Fig. 2.3).

Since 2002, many applications of CWI have been developed, including monitoring

of the earth crust with ambient seismic noise (Sens-Schönfelder et Wegler, 2006; Brenguier *et al.*, 2008b,a). In this paper, we focus more specifically on developments in non-destructive testing and evaluation of concrete. The next section presents data processing procedures adapted to the high precision requested for CWI. Then we will review recent applications of CWI in concrete.

## 2.2 CWI data processing

There are several ways to measure a relative velocity change  $dV/V$  in the coda. The first one, introduced in Poupinet *et al.* (1984), and further developed in Snieder *et al.* (2002), is to evaluate the time delays in consecutive small time-windows of length  $T$  at different times  $t$  in the coda, after the following cross-correlation :

$$CC(t, \delta t) = \frac{\int_{t-T/2}^{t+T/2} \varphi(t) \varphi'(t + \delta t) dt}{\sqrt{\int_{t-T/2}^{t+T/2} \varphi^2 dt \int_{t-T/2}^{t+T/2} \varphi'^2 dt}}, \quad (2.6)$$

The cross-correlation can be either performed in the frequency domain (Poupinet *et al.*, 1996) or in the time domain. The time delay that maximizes  $CC$  is the actual delay at time  $t$  in the coda and corresponds linearly to the relative velocity change in the medium :  $\delta t/t = -\delta V/V$ . The relative velocity change is thus deduced from the linear regression of the time-delay versus time in the coda. In order to process the full coda as a whole, several authors (Lobkis et Weaver, 2003; Sens-Schönfelder et Wegler, 2006; Larose *et al.*, 2009) proposed another method : the stretching technique. In order to track the relative velocity change between the initial and final states, the final waveform is interpolated at times  $t(1 - \varepsilon)$  and the correlation coefficient with the initial waveform is evaluated :

$$CC(\varepsilon) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \varphi' [t(1 - \varepsilon)] \varphi [t] dt}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \varphi'^2 [t(1 - \varepsilon)] dt \int_{t_1}^{t_2} \varphi^2 [t] dt}}, \quad (2.7)$$

where  $t_1$  and  $t_2$  mark the time window in the coda where the relative velocity change is measured. This time window can be much larger than the one used in the doublet technique. This calculation is performed for various stretching factors  $\varepsilon$ . The stretching factor  $\varepsilon_{max}$  that corresponds to the actual relative velocity change in the medium maximizes the correlation coefficient (2.7) :  $\varepsilon_{max} = dV/V$ . More details about signal processing can be found in Hadziioannou *et al.* (2009), where the authors demonstrate that the latter technique is more stable and precise than the first one, especially in noisy environment.

## 2.3 Application of CWI to thermal changes

The simplest physical effect that results in a relative velocity change is probably the temperature. Thermal variations result in variation of the material acoustic velocity,

and dilation. The former effect being in general one order of magnitude larger than the latter, we can attribute an apparent velocity change in the US coda to an actual velocity change in the material. The effect of temperature on concrete is well-known, but the measurement of thermal CWI is relatively recent. In their initial experiment, Larose *et al.* (2006) acquired acoustic coda waves in a concrete structure at different times of the day, and measured the thermally induced ultrasonic velocity changes. They confirmed this effect to be mainly reversible, and they quantified the relative velocity change in concrete to be of the order of  $1.6 \times 10^{-3} K^{-1}$ . Again, the advantage here of CWI compared to time-of-flight techniques is the high precision of measurement. This effect was quantitatively confirmed by C. Wunderlich (2011).

Practical applications of thermal CWI on concrete are not straightforward. In 2005, Michaels et Michaels (2005) suggested to use CWI to detect damage in metals. In their paper, they investigated the effect of both external temperature variations and damage in an aluminum specimen. They not only analyzed the relative velocity change but also the remnant correlation coefficient (coherence) to discriminate between the global change induced by temperature variations and the local change induced by a defect. This was certainly the first application of CWI to non-destructive testing. A similar technique could certainly be developed for concrete damage assessment. Nevertheless, in most cases temperature variations are considered as a potential pollution of CWI measurements. In order to discriminate relative velocity changes induced by environmental conditions such as temperature from relative velocity changes induced by mechanical solicitations, Zhang *et al.* (2012b) proposed to use two separate samples : one for the mechanical test and the other one as a reference, both experiencing the same environmental change. Up to now, this thermal bias control procedure is certainly the most reliable way to get rid of environmental effects on CWI.

## 2.4 Application of CWI to acousto-elasticity

When motion equations include non-linear elastic laws, ultrasonic velocities and strain are found to depend on one another. Changes in mechanical stress thus result in changes in acoustic velocities, forming the basis of acousto-elasticity. In the case of normal (uniaxial) stress in direction  $z$ , the velocity of the wave propagating in direction  $i$  with polarization in direction  $j$  reads (Lillamand *et al.*, 2010) :

$$c_{ij}(\sigma) = c_{ij}^0(1 + A_{ij}\sigma_{zz}) \quad (2.8)$$

where  $c^0$  is the velocity at rest (null stress), and  $A_{ij}$  are acousto-elastic constant that depend on Lamé and Murnaghan's coefficients. The acousto-elastic constants also depend on the non-linear elastic parameters  $\beta$  :

$$A_{ij} = -\frac{\beta_{ij}}{E}, \quad (2.9)$$



with  $E$  the elastic modulus. Larose *et al.* (2009) demonstrated that the stretching technique applied to CWI allows to recover the relative velocity change with a precision of  $10^{-5}$ , a level of sensitivity that enables monitoring stress change in concrete with load increments as small as 50 kPa, far below stress levels that could irreversibly damage the material. Such levels of load are also easily performed on-site, which is a main practical advantage of CWI. As they used the late part of the coda, the elastic constant that they measured is regarded as averaged over all directions and polarizations :  $A = \langle A_{ij} \rangle_{ij}$ . In the same time, Payan *et al.* (2009) demonstrated that the coda also retains some pieces of information on the initial polarization of the wave, thus offering the mean to estimate the third order elastic constants. For now, the question of determining how the multiple scattering mixes the polarization in the late coda is still open, and it is hard to say for sure whether we observe  $\langle A_{ij} \rangle_{ij}$  or  $A_{ij}$  with CWI. Therefore, instead of analyzing the absolute value of the acousto-elastic constant, we will focus in the following on its evolution versus damage in a given structure.

### 2.4.1 Application to monitoring stress changes

On-site application to real structures rapidly followed 2009 papers. Stähler *et al.* (2011) performed CWI on a concrete bridge in construction. The building process used the Incremental Launch method, a technique that pushes horizontally the girder onto the pillars until reaching the opposite site of the valley. During the launching process, the concrete frame of the bridge thus undergoes severe stress fluctuations. The authors could successfully observe the relative velocity changes associated with the load of the frame on the pillars. The simplest application of stress-induced CWI is certainly to measure on-site stress changes in concrete, a technique that requires to know in advance the acousto-elastic constant  $A$ . Another application of CWI is to measure the stress (or strain) and deduce the acousto-elastic constant. We develop this latter approach in the next subsection.

### 2.4.2 Application to monitoring damage

At the same period, Zhang *et al.* (2011) performed CWI on a concrete rail-track prototype. As the concrete sample (real size) was subject to successive loadings mimicking damage and aging due to traffic (high speed strain), the authors demonstrated that the non-linear elastic constant (the slope of the relative velocity change versus stress during test sequences) increased with load cycles, offering the first demonstration of on-site assessment of concrete damage with CWI. Many other recent articles report on a wide variety of stress-induced CWI experiments (Shokouhi *et al.*, 2010; Masera *et al.*, 2011; Schurr *et al.*, 2011; Schurr, 2010; Zhang *et al.*, 2012a), and observe different acousto-elastic coefficients. As acousto-elasticity depends on the constitution of the material (the formulation of concrete), values may vary from one sample to another, but in general healthy concrete samples show an acousto-elastic constant of the order of  $0.1 \times 10^{-3}$  to  $2 \times 10^{-3} \text{ MPa}^{-1}$ . Acousto-elastic values of damaged concrete significantly differs and are



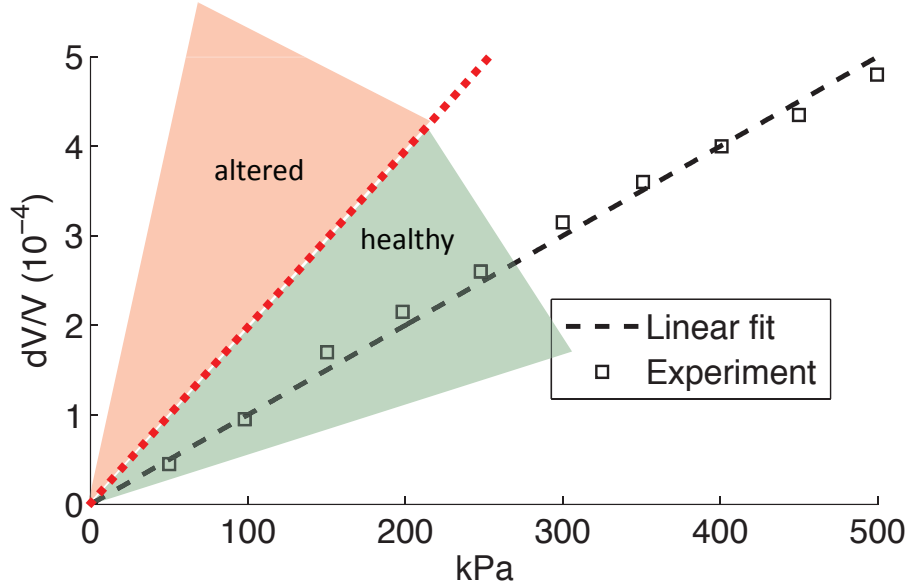


FIGURE 2.4 – Relative velocity changes versus load. The slope of the linear fit corresponds to the acousto-elastic constant (Larose *et al.*, 2009). The red dotted line marks the transition between healthy and altered (damaged) concrete. This transition is not clearly identified yet, but the value of  $2 \times 10^{-3} \text{ MPa}^{-1}$  could be considered as a first approximation of the transition (color online).

found to be larger : experiments report on values ranging from  $2 \times 10^{-3}$  to  $6 \times 10^{-3} \text{ MPa}^{-1}$ . Note that higher values are expected for more intense damage. This was reported on different kinds of damage, including mechanical damage (Shokouhi *et al.*, 2010; Masera *et al.*, 2011; Schurr *et al.*, 2011; Zhang *et al.*, 2011), thermal damage (Schurr *et al.*, 2011) and chemical damage (alkali-silica reaction) (Schurr, 2010). Therefore, we conclude from this collection of recent experiments that acousto-elasticity values increase with increasing damage, and that the value of  $2 \times 10^{-3} \text{ MPa}^{-1}$  could be considered as a level of significant damage and might constitute a relevant estimation of the transition from healthy to altered concrete.

## 2.5 Conclusion et perspectives

La coda ultrasonore est un outil très efficace pour mesurer des changements faibles dans le béton. La principale quantité utilisée dans les travaux présentés est la variation relative de vitesse apparente. Cette mesure, d'une précision relative pouvant atteindre  $10^{-5}$ , peut quantifier des variations de contrainte, de température ou d'endommagement

du matériau.

Comme dans le cas des ondes sismiques, l'utilisation de la coda concerne jusqu'à présent des changements globaux s'opérant dans le milieu. Mais avant de nous intéresser à la surveillance de changements locaux, étudions dans le prochain chapitre le formalisme et les principaux résultats concernant le régime de diffusion multiple.



## Chapitre 3

# Éléments théoriques et transport en diffusion multiple

Avant de pouvoir modéliser l'effet d'un changement local en milieu hétérogène, il est nécessaire d'introduire un certain nombre de concepts et résultats concernant le régime de diffusion multiple. Ce chapitre regroupe l'essentiel des outils utilisés dans les développements théoriques présentés en deuxième partie du manuscrit. La plupart des résultats sont extraits des ouvrages de Akkermans et Montambaux (2004) et Sheng (2006). En complément, on pourra consulter la review de van Rossum et Nieuwenhuizen (1999) ou l'ouvrage de Frisch (1968) pour les aspects mathématiques.

Nous commençons par rappeler l'expression des fonctions de Green en milieu homogène. Ces solutions sont ensuite utilisées pour résoudre l'équation d'onde en milieu hétérogène, à l'aide d'un développement perturbatif. Ce développement est d'abord appliqué à l'interaction d'une onde avec un défaut unique avant de considérer un milieu rempli de diffuseurs.

Pour s'affranchir d'une réalisation particulière du désordre et rendre le calcul analytique possible, nous introduisons la notion de moyenne d'ensemble. L'onde ainsi moyennée (ou onde cohérente) traversant ce type de milieu est atténuée considérablement après une distance de propagation appelée libre parcours moyen  $\ell$ . Pour des distances supérieures, il est nécessaire de s'intéresser à la moyenne d'ensemble de l'intensité, seule grandeur accessible.

Nous introduisons alors l'équation de Bethe-Salpether, régissant l'intensité en diffusion multiple. Nous étudions enfin les solutions exactes du transport dans l'approximation du transfert radiatif isotrope, puis dans l'approximation de la diffusion. Ces solutions permettent en pratique de décrire l'enveloppe des signaux acquis expérimentalement en milieu hétérogène.

Par souci de lisibilité, certains calculs intermédiaires ne sont pas explicités mais sont consultables dans l'annexe située en fin de première partie.

### 3.1 Équation d'onde et fonctions de Green en milieu homogène

#### 3.1.1 Équation d'onde et fonctions de Green

Dans les fluides compressibles, pour des perturbations de faibles amplitudes supposées adiabatiques, on montre que le champ de pression  $p(\mathbf{r}, t)$  vérifie l'équation d'onde suivante<sup>1</sup> :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

où la vitesse des ondes vaut  $c = 1/\sqrt{\rho\chi}$ , avec  $\rho$  la densité du fluide et  $\chi$  sa compressibilité. Dans le cas général, la vitesse  $c$  dépend de la position  $\mathbf{r}$  et du temps  $t$ . Si l'on se restreint à des milieux qui évoluent lentement par rapport aux temps de propagation des ondes, alors l'équation générale des ondes scalaires s'écrit :

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c(\mathbf{r})^2} \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.2)$$

Par définition, la fonction de Green  $g(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)$  correspondante est solution de l'équation :

$$\Delta g(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t) - \frac{1}{c(\mathbf{r})^2} \frac{\partial^2 g(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s})\delta(t) \quad (3.3)$$

qui décrit dans la convention adoptée ici<sup>2</sup> le champ d'onde en  $\mathbf{r}$  (récepteur) engendré par une excitation impulsionnelle à  $t = 0$  en  $\mathbf{s}$  (source). Le terme source en « dirac » permet d'exciter toutes les fréquences temporelles et spatiales du système, faisant de la fonction de Green un outil très puissant, équivalent à la solution complète du problème (voir propriété A.7). Pour résoudre cette équation, il est judicieux de passer dans le domaine fréquentiel. Soit  $G(\omega, \mathbf{s}, \mathbf{r})$  la transformée de Fourier temporelle de  $g(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)$ . En suivant la convention (A.1), on pose :

$$\begin{aligned} G(\omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt, \\ g(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (3.4)$$

On en profite pour rappeler l'expression de la transformée de Fourier d'un dirac :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{i\omega t} dt = 1,$$

---

1. La vitesse particulière et la densité vérifient la même équation.

2. Cette convention inhabituelle, empruntée à Akkermans et Montambaux (2004) est plus adaptée à la description du transport de l'intensité étudié dans la suite.

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.5)$$

En remplaçant les expressions (3.4) et (3.5) dans l'équation d'onde (3.3), on obtient dans le domaine fréquentiel :

$$\Delta G(\omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}) + k(\mathbf{r})^2 G(\omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}) \quad (3.6)$$

avec  $k(\mathbf{r})^2 = \frac{\omega^2}{c(\mathbf{r})^2}$ . Cette équation porte le nom d'équation de Helmholtz.

### 3.1.2 Solutions en milieu homogène

Dans le cas d'un milieu homogène infini de vitesse  $c_0$ , l'invariance par translation implique que seule la distance à la source  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{s}$  intervient dans la fonction de Green. L'équation de Helmholtz (3.6) se réécrit alors :

$$\Delta G_0(\omega, \mathbf{R}) + k_0^2 G_0(\omega, \mathbf{R}) = \delta(\mathbf{R}) \quad (3.7)$$

où  $k_0^2 = \omega^2/c_0^2$  est le nombre d'onde de la fonction de Green  $G_0(\omega, \mathbf{R})$  du milieu homogène. Cette équation se résout facilement dans le domaine des vecteurs d'ondes ou fréquences spatiales. En suivant la convention (A.2), l'application d'une transformée de Fourier spatiale nous donne<sup>3</sup> :

$$\begin{aligned} \hat{G}(\omega, \mathbf{k}) &= \int G(\omega, \mathbf{R}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} d\mathbf{R} \\ G(\omega, \mathbf{R}) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int \hat{G}(\omega, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.8)$$

où  $\hat{G}$  dénote la fonction de Green dans le domaine  $(\omega, \mathbf{k})$  et  $d$  la dimension de l'espace. La fonction de dirac spatiale, peut également s'écrire :

$$\delta(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} d\mathbf{k} \quad (3.9)$$

En insérant à nouveau ces expressions (3.8) et (3.9) dans l'équation de Helmholtz (3.7), l'équation se linéarise pour donner la solution :

$$\hat{G}_0(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{k_0^2 - k^2} \quad (3.10)$$

Dans le domaine  $(\omega, \mathbf{k})$ , la fonction de Green est indépendante de la dimension de l'espace. La divergence en  $k = k_0$ , qui correspond à la résonance naturelle du milieu, pose problème pour effectuer la transformation spatiale inverse. Pour contourner ce problème, il convient d'ajouter une petite partie imaginaire  $\beta \ll 1$  au nombre d'onde  $k_0$ . Cela

---

3. La convention de signe dans la transformée spatiale est opposée à celle de la transformée temporelle.

revient à introduire un peu d'absorption ou d'amplification dans le milieu selon que  $\beta > 0$  ou  $\beta < 0$  respectivement.

$$\hat{G}_0(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{k_0'^2 - k^2} = \frac{1}{k_0^2 - k^2 + i\gamma} \quad (3.11)$$

avec  $k_0' = k_0 + i\beta$ ,  $\gamma = 2k_0\beta$  et en négligeant le terme en  $\beta^2$ . Nous verrons par la suite que le signe de  $\beta$  détermine le comportement de la fonction de Green dans l'espace réel.

En dimension 3 et en notant que la fonction de Green ne dépend que du module de  $\mathbf{k}$ , la transformée spatiale inverse se simplifie en coordonnées sphériques :

$$G_0(\omega, \mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \hat{G}_0(\omega, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi \quad (3.12)$$

En choisissant  $\mathbf{R}$  selon l'axe ( $Oz$ ) et sans perte de généralité, on peut écrire :

$$\begin{aligned} G_0(\omega, \mathbf{R}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \hat{G}_0(\omega, \mathbf{k}) \int_0^\pi e^{ik|\mathbf{R}|\cos\theta} \sin \theta d\theta k^2 dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \hat{G}_0(\omega, \mathbf{k}) \int_{-1}^1 e^{ik|\mathbf{R}|\cos\theta} d(\cos \theta) k^2 dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{i|\mathbf{R}|} \int_0^{+\infty} \hat{G}_0(\omega, \mathbf{k}) (e^{ik|\mathbf{R}|} - e^{-ik|\mathbf{R}|}) k dk \\ &= \frac{1}{4\pi^2 i |\mathbf{R}|} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{G}_0(\omega, \mathbf{k}) e^{ik|\mathbf{R}|} k dk \end{aligned} \quad (3.13)$$

La fonction  $\hat{G}_0$  possède deux pôles simples en  $+k_0'$  et  $-k_0'$ . En intégrant dans le plan complexe supérieur et en utilisant le théorème des résidus, on trouve :

$$G_0(\omega, \mathbf{R}) = -\frac{e^{ik_0'|\mathbf{R}|}}{4\pi|\mathbf{R}|} \quad (3D) \quad (3.14)$$

pour  $\beta > 0$ , c'est à dire pour un milieu absorbant et :

$$G_0(\omega, \mathbf{R}) = -\frac{e^{-ik_0'|\mathbf{R}|}}{4\pi|\mathbf{R}|} \quad (3D) \quad (3.15)$$

pour  $\beta < 0$ , c'est à dire pour un milieu amplifiant. En faisant tendre la partie imaginaire de  $k_0'$  vers 0, on trouve les deux solutions limites  $G_0^+$  et  $G_0^-$  qui correspondent respectivement à des ondes émergentes ou convergentes vers la source :

$$G_0^\pm(\omega, \mathbf{R}) = -\frac{e^{\pm ik_0|\mathbf{R}|}}{4\pi|\mathbf{R}|} \quad (3D) \quad (3.16)$$

Ces solutions sont également appelées fonctions de Green causale et acausale du système, ou fonctions de Green retardée et avancée. En dimension 2, un calcul similaire permet de trouver :

$$G_0^\pm(\omega, \mathbf{R}) = \mp \frac{i}{4} H_0^{(1,2)}(k_0 |\mathbf{R}|) \quad (2D) \quad (3.17)$$

où  $H_0^{(1,2)}$  représente les fonctions de Hankel d'ordre 0 du premier et second type. A grande distance, ces fonctions tendent asymptotiquement vers  $-\frac{e^{\pm i(k_0 |\mathbf{R}| + \frac{\pi}{4})}}{2\sqrt{2\pi k_0 |\mathbf{R}|}}$ . Pour finir, en faisant la transformée temporelle inverse, on trouve :

$$g_0^\pm(t, \mathbf{R}) = -\frac{\delta(t \mp \frac{|\mathbf{R}|}{c})}{4\pi |\mathbf{R}|} \quad (3D) \quad (3.18)$$

$$g_0^\pm(t, \mathbf{R}) = -\frac{\Theta(t \mp \frac{|\mathbf{R}|}{c})}{2\pi \sqrt{t^2 \mp \frac{R^2}{c}}} \quad (2D) \quad (3.19)$$

où  $\Theta$  dénote la fonction de Heaviside<sup>4</sup>. Ces solutions correspondent à des ondes sphérique et cylindrique à 2D et 3D respectivement. La nature divergente ou convergente des fonctions de Green est plus explicite sous forme temporelle car elle dépend directement du signe séparant les variables spatiale et temporelle.

## 3.2 Fonctions de Green en milieu hétérogène

Revenons maintenant au cas général de l'équation de Helmholtz (3.6). Il est formellement possible de décomposer le nombre d'onde en tout point  $\mathbf{r}$  selon  $k^2(\mathbf{r}) = k_0^2 - V(\mathbf{r})$ , où  $k_0$  représente le milieu homogène sous-jacent et où  $V(\mathbf{r})$  est un potentiel qui décrit les fluctuations liées au désordre. On obtient alors :

$$\Delta G(\omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}) + k_0^2 G(\omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}) + V(\mathbf{r}) G(\omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}) \quad (3.20)$$

Le membre de droite peut être vu comme un terme source. La connaissance de la fonction de Green du milieu homogène nous permet alors d'écrire la solution comme un produit de convolution :

$$G(\omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}) = G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{s}) + \int G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_1) G(\omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \quad (3.21)$$

Cette équation intégrale permet d'obtenir la solution sous forme d'un développement perturbatif du membre de droite. Les conditions sur le potentiel  $V(\mathbf{r})$  pour que cette formulation soit correcte sont discutées dans l'ouvrage de Frisch (1968).

4. Contrairement au cas 3D (et à l'intuition), la fonction de Green temporelle à deux dimensions n'est pas rigoureusement impulsionnelle.



### 3.2.1 Développement perturbatif

Pour alléger les notations dans ce développement, deux approches sont intéressantes, l'écriture diagrammatique et l'écriture en opérateurs. L'utilisation des diagrammes requerrait un nombre important de conventions à poser et n'apporterait que peu de clarification dans ce manuscrit. Nous choisissons alors d'utiliser par la suite l'écriture en opérateur. Pour une introduction détaillée et pédagogique aux diagrammes, on pourra par exemple consulter la thèse de Tourin (1999).

En considérant l'espace comme finement discrétisé sur un maillage de volume élémentaire  $(\delta r)^d$  autour de chaque point  $\mathbf{r}$ ,  $G(\omega, \mathbf{s}, \mathbf{r})$  peut être vue comme une matrice carrée et  $V(\mathbf{r})$  comme une matrice carrée diagonale. La solution (3.21) de l'équation de Helmholtz peut donc se réécrire :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G} \quad (3.22)$$

où les éléments de matrice sont définis par :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_2 | \mathbf{G} | \mathbf{r}_1 \rangle &= G(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \\ \langle \mathbf{r}_2 | \mathbf{G}_0 | \mathbf{r}_1 \rangle &= G_0(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G_0(\omega, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \\ \langle \mathbf{r}_2 | \mathbf{V} | \mathbf{r}_1 \rangle &= V(\mathbf{r}_1) \delta_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} (\delta r)^d \end{aligned} \quad (3.23)$$

Par construction, la base spatiale  $|\mathbf{r}\rangle$  est orthonormale et obéit à la relation de fermeture :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_i | \mathbf{r}_j \rangle &= \delta_{\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j} \\ \sum_i |\mathbf{r}_i\rangle \langle \mathbf{r}_i| &= \mathbf{I}_d \end{aligned} \quad (3.24)$$

avec  $\mathbf{I}_d$  la matrice identité. On définit également la base des  $|\mathbf{k}\rangle$  en utilisant la transformée de Fourier spatiale comme :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k} | \mathbf{r} \rangle &= e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ \langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle &= e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Les notations en opérateur ont l'avantage de rester valables quelle que soit la base choisie. En développant la solution (3.22), on obtient :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 + \dots \quad (3.26)$$

que l'on peut écrire succinctement :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{T} \mathbf{G}_0 \quad (3.27)$$

avec

$$\mathbf{T} = \mathbf{V} + \mathbf{V}\mathbf{G}_0\mathbf{V} + \mathbf{V}\mathbf{G}_0\mathbf{V}\mathbf{G}_0\mathbf{V} + \dots \quad (3.28)$$

La matrice de transition  $\mathbf{T}$ , appelée communément matrice  $\mathbf{T}$ , contient tous les ordres de diffusion générés par le potentiel  $\mathbf{V}$  et sa connaissance est équivalente à avoir la solution complète de l'équation de Helmholtz (3.6). Évidemment, toute la difficulté du problème a été déplacée dans le calcul de cette matrice, qui dans le cas général est impossible à déterminer exactement.

### 3.2.2 Cas d'un diffuseur unique

Étudions pour le moment les propriétés d'un diffuseur unique et localisé dans un milieu homogène. Nous introduisons d'abord le cas limite d'un diffuseur ponctuel. La matrice  $\mathbf{T}$  de ce diffuseur sera utilisée au chapitre 5 pour la modélisation d'un changement local en milieu hétérogène. Nous abordons ensuite la notion de section efficace de diffusion à travers l'exemple du petit diffuseur sphérique ou cylindrique. Nous terminons par la description du théorème optique, qui traduit la conservation de l'énergie lors d'un processus de diffusion élastique.

#### Matrice $\mathbf{T}$ d'un diffuseur ponctuel

En suivant les notations en opérateurs introduites précédemment (3.23), le potentiel  $\mathbf{V}$  d'un diffuseur ponctuel situé en  $\mathbf{r}_0$  peut s'écrire :

$$\langle \mathbf{r}_1 | \mathbf{V} | \mathbf{r}_2 \rangle = V(\mathbf{r}_0) v_s \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_2) \quad (3.29)$$

avec  $v_s$  le volume du diffuseur. La matrice  $\mathbf{T}$  du diffuseur ponctuel (notée  $\mathbf{t}$ ) se calcule en sommant tous les ordres du développement (3.28) :

$$\langle \mathbf{r}_1 | \mathbf{t} | \mathbf{r}_2 \rangle = \mathbf{t}(\omega) \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_2) \quad (3.30)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\omega) &= V(\mathbf{r}_0) v_s + (V(\mathbf{r}_0) v_s)^2 G_0^+(\omega, \mathbf{0}) + (V(\mathbf{r}_0) v_s)^3 (G_0^+(\omega, \mathbf{0}))^2 + \dots \\ &= \frac{V(\mathbf{r}_0) v_s}{1 - V(\mathbf{r}_0) v_s G_0^+(\omega, \mathbf{0})} \end{aligned} \quad (3.31)$$

en reconnaissant l'expression d'une série géométrique. On note que la divergence de la fonction de Green en 0 est limitée en pratique par la taille finie du diffuseur et peut se régulariser par divers procédés (voir par exemple Margerin (2011)). On note au passage que la matrice  $\mathbf{t}$  vérifie l'identité suivante :

$$\mathbf{t}(-\omega) = \mathbf{t}^*(\omega) \quad (3.32)$$

Cette relation de symétrie découle directement de la définition de  $G_0$  (3.16) et sera utilisée par la suite.

### Section efficace et amplitude de diffusion :

Nous venons de calculer la matrice  $\mathbf{T}$  d'un diffuseur ponctuel. En supposant que nous connaissions la matrice  $\mathbf{T}$  d'un défaut localisé, cherchons à exprimer la solution de la diffusion d'une onde plane. Considérons pour cela l'équation homogène de Helmholtz en présence du défaut localisé (potentiel  $V(\mathbf{r})$ ) :

$$\begin{aligned} \Delta\phi(\omega, \mathbf{r}) + (k_0^2 - V(\mathbf{r}))\phi(\omega, \mathbf{r}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\Delta + k_0^2)\phi(\omega, \mathbf{r}) &= V(\mathbf{r})\phi(\omega, \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (3.33)$$

La solution  $|\phi\rangle$  s'obtient par convolution de la fonction de Green homogène  $\mathbf{G}_0$  avec le membre de droite :

$$|\phi\rangle = |\phi_0\rangle + \mathbf{G}_0 \mathbf{V} |\phi_0\rangle + \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} |\phi_0\rangle + \dots \quad (3.34)$$

$$= |\phi_0\rangle + \mathbf{G}_0^+ \mathbf{t}^+ |\phi_0\rangle \quad (3.35)$$

où  $|\phi_0\rangle$  représente la solution du milieu homogène ( $\mathbf{V} = 0$ ). Les exposants + sélectionnent la solution émergente (causale) du système. En choisissant une onde plane à 3D comme solution du milieu homogène, la solution se réécrit :

$$\phi(\omega, \mathbf{r}) = e^{ik_0 \cdot \mathbf{r}} + \sum_{\mathbf{r}_1} \sum_{\mathbf{r}_2} \langle \mathbf{r} | \mathbf{G}_0^+ | \mathbf{r}_1 \rangle \langle \mathbf{r}_1 | \mathbf{t}^+ | \mathbf{r}_2 \rangle e^{ik_0 \cdot \mathbf{r}_2} \quad (3.36)$$

Nous supposons maintenant le défaut localisé dans une sphère de rayon  $R$  centrée sur l'origine du repère (Figure 3.1). Le terme  $\langle \mathbf{r}_1 | \mathbf{t}^+ | \mathbf{r}_2 \rangle$  étant nul à l'extérieur du diffuseur ( $r_1, r_2 > R$ ), on peut développer  $\mathbf{G}_0^+(\omega, |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|)$  à grande distance  $r \gg R$  comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_0^+(\omega, |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) &= -\frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \\ &\simeq -\frac{e^{ik_0 r}}{4\pi r} e^{-i\mathbf{k}'_0 \cdot \mathbf{r}_1} \end{aligned} \quad (3.37)$$

en utilisant  $k_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = k_0 r \sqrt{1 + (\frac{r_1}{r})^2 - 2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1}{r^2}} \simeq k_0 r - \mathbf{k}'_0 \cdot \mathbf{r}_1$  où  $\mathbf{k}'_0 = \frac{k_0 \mathbf{r}}{r}$ . En remplaçant l'expression en champ lointain (3.37) dans l'équation (3.36), on obtient la solution :

$$\phi(\omega, \mathbf{r}) \simeq e^{ik_0 \cdot \mathbf{r}} - \frac{e^{ik_0 r}}{4\pi r} \langle \mathbf{k}'_0 | \mathbf{t}^+ | \mathbf{k}_0 \rangle \quad (3.38)$$

en identifiant  $\langle \mathbf{r}_2 | \mathbf{k}_0 \rangle = e^{ik_0 \cdot \mathbf{r}_2}$  et  $\langle \mathbf{k}'_0 | \mathbf{r}_1 \rangle = e^{-ik'_0 \cdot \mathbf{r}_1}$

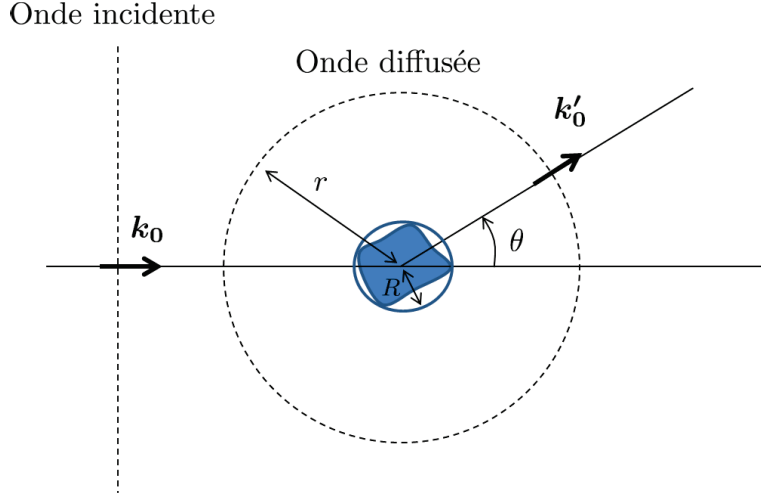


FIGURE 3.1 – Représentation schématique de la diffusion d'une onde plane par un défaut localisé. En champ lointain  $r \gg R$ , l'onde diffusée est quasi-sphérique.

En champ lointain, on observe que le champ total  $\phi_T$  s'écrit comme la somme de l'onde plane incidente et d'une onde sphérique qui émerge du défaut (onde diffusée) soit :

$$\phi_T(\omega, r) = e^{ik_0 \cdot \mathbf{r}} + f(\mathbf{k}'_0, \mathbf{k}_0) \frac{e^{ik_0 r}}{r} \quad (3D) \quad (3.39)$$

où le facteur d'anisotropie  $f(\mathbf{k}'_0, \mathbf{k}_0)$ , appelé amplitude diffusion, dépend de la direction de diffusion  $\mathbf{k}'_0$  ainsi que de la direction incidente  $\mathbf{k}_0$ . Ce facteur décrit la répartition angulaire de l'énergie diffusée et se calcule en fonction de la matrice  $\mathbf{T}$  du défaut :

$$f(\mathbf{k}'_0, \mathbf{k}_0) = -\frac{\langle \mathbf{k}'_0 | \mathbf{t}^+ | \mathbf{k}_0 \rangle}{4\pi} \quad (3D) \quad (3.40)$$

Similairement, on peut démontrer en dimension 2 (Sheng, 2006) que le champ total s'écrit :

$$\phi_T(\omega, r) = e^{ik_0 \cdot \mathbf{r}} + f(\mathbf{k}'_0, \mathbf{k}_0) \frac{e^{ik_0 r}}{\sqrt{r}} \quad (2D) \quad (3.41)$$

avec

$$f(\mathbf{k}'_0, \mathbf{k}_0) = -\frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0}} \langle \mathbf{k}'_0 | \mathbf{t}^+ | \mathbf{k}_0 \rangle e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad (2D) \quad (3.42)$$

Pour un défaut sphérique (3D) ou cylindrique (2D), par symétrie, l'amplitude de diffusion ne dépend que de l'angle de diffusion  $\theta$  par rapport à la direction incidente et l'on définit la section efficace différentielle de diffusion par :

$$\sigma_\theta(\theta) = |f(\theta)|^2 \quad (3.43)$$

En pratique, la répartition angulaire de la section efficace différentielle dépend principalement du rapport entre la taille du défaut et la longueur d'onde. Des illustrations tirées de simulations en différences finies sont présentées dans la Figure 3.2. Les paramètres de la simulation ainsi que la méthode de calcul seront présentés au chapitre 5.

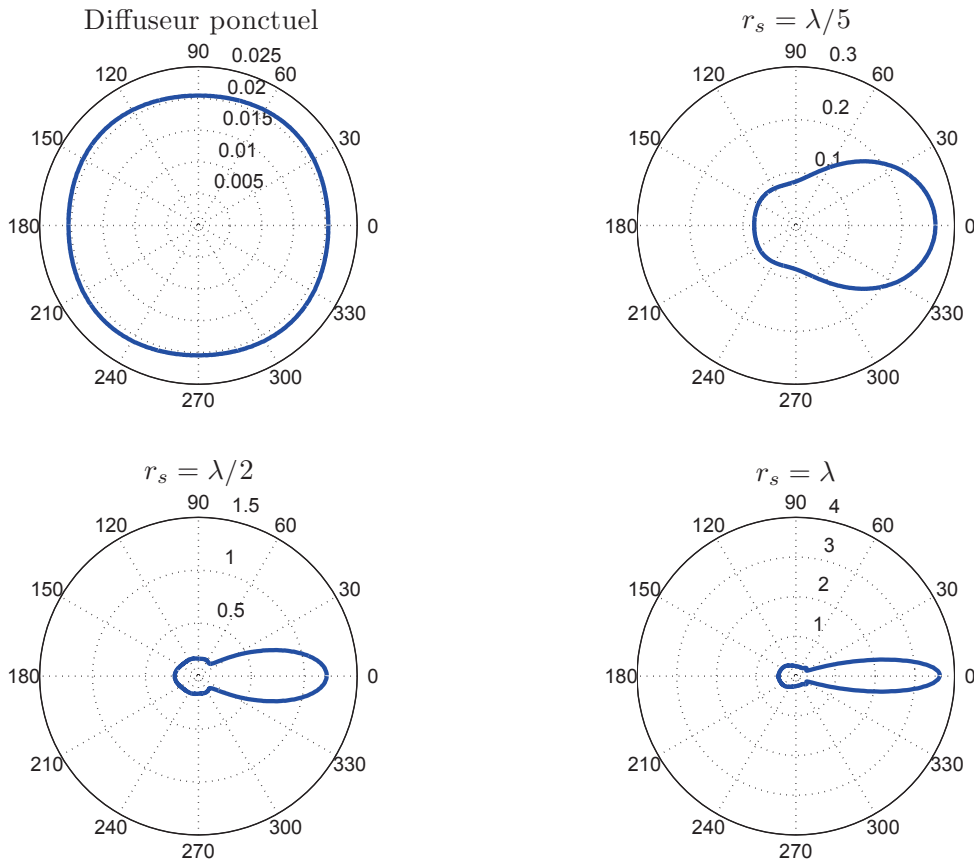


FIGURE 3.2 – Sections efficaces différentielles de diffuseurs mous cylindriques de différents rayons  $r_s$ . Le diffuseur ponctuel correspond à 1 point de grille ( $\lambda/15$ ), la diffusion est isotrope. Plus le défaut est gros, plus la diffusion est piquée vers l'avant. Ces résultats sont issus de simulations numériques en différences finies (2D acoustique).

La section efficace (totale) s'obtient par intégration de la section efficace différentielle sur toutes les directions possibles :

$$\sigma = \int_0^{2\pi} \sigma_\theta(\theta) d\theta \quad (2D)$$

$$\sigma = 2\pi \int_0^\pi \sigma_\theta(\theta) \sin \theta d\theta \quad (3D) \quad (3.44)$$

La section efficace d'un défaut est une grandeur qui permet de quantifier sa capacité à dévier les ondes, elle est homogène à une surface pour un milieu 3D et à une longueur pour un milieu 2D. C'est une des grandeurs que nous utiliserons par la suite pour quantifier l'intensité d'un changement local survenant dans un milieu surveillé.

Pour un diffuseur ponctuel, la diffusion est isotrope, l'énergie diffusée est distribuée de manière égale dans toutes les directions<sup>5</sup>. Dans ce cas, en utilisant la définition de la section efficace  $\sigma$  (éq. 3.43 et 3.44) et de l'amplitude de diffusion (3.40), on obtient une relation simple entre matrice  $\mathbf{T}$  du défaut et  $\sigma$  :

$$\sigma = \frac{\mathbf{t}\mathbf{t}^*}{4\pi} \quad (3D)$$

$$\sigma = \frac{\mathbf{t}\mathbf{t}^*}{4k_0} \quad (2D) \quad (3.45)$$

Ces relations, valables pour des diffuseurs isotropes, seront utilisées lors de la description du transport de l'intensité dans un milieu dilué.

### Théorème optique :

Dans le cas général, on peut montrer (Sheng, 2006) que la section efficace de diffusion d'un défaut quelconque peut s'exprimer en fonction de sa matrice  $\mathbf{T}$  par la relation suivante :

$$\sigma = \frac{-\Im \langle \mathbf{k}_0 | \mathbf{t} | \mathbf{k}_0 \rangle}{k_0} \quad (3.46)$$

Cette relation qui constitue le théorème optique décrit le fait que l'énergie soustraite par le diffuseur dans la direction incidente  $\mathbf{k}_0$  est redistribuée intégralement dans les autres directions. Cette relation de conservation de l'énergie permet d'évaluer la section efficace d'un défaut en connaissant seulement l'amplitude de diffusion dans la direction incidente.

---

5. Cette propriété n'est pas valable pour un diffuseur très dense, aussi petit soit-il.

### 3.2.3 Diffusion multiple et milieu effectif

Dans un milieu quelconque, on rappelle que la fonction de Green de l'équation de Helmholtz peut s'écrire (3.26) :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 + \dots \quad (3.47)$$

Le calcul de la fonction de Green est très complexe, car il nécessite la connaissance complète du potentiel  $\mathbf{V}$ <sup>6</sup>. En pratique, cela revient à connaître entièrement la composition et la position des hétérogénéités du milieu étudié. Une approche plus simple et plus utile consiste à calculer la moyenne d'ensemble de la fonction de Green. La moyenne d'ensemble correspond à une moyenne sur une infinité de réalisations du désordre. Seule la connaissance « statistique » de la composition du milieu est alors nécessaire. La fonction de Green moyenne  $\overline{\mathbf{G}}$  s'écrit ainsi :

$$\overline{\mathbf{G}} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \overline{\mathbf{V}} \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \overline{\mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V}} \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \overline{\mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0 \mathbf{V}} \mathbf{G}_0 + \dots \quad (3.48)$$

où  $\mathbf{G}_0$ , par définition, ne dépend pas du désordre. Le calcul ne nécessite plus que la connaissance de la moyenne d'ensemble du potentiel  $\mathbf{V}$  ainsi que de ses différentes corrélations spatiales.

L'approximation la plus simple à ce stade consiste à considérer un milieu constitué d'un grand nombre  $N$  de diffuseurs ponctuels identiques et indépendants, localisés en des points  $\mathbf{r}_i$  distribués uniformément et caractérisés par leur potentiel  $V_i$ . Cette approximation, notée ISA comme Independent Scattering Approximation, est valable pour les milieux suffisamment dilués, dans lesquels les corrélations entre diffuseurs sont négligeables. C'est dans cette approximation, introduite originellement par Foldy (1945), que nous nous situerons dans la suite du manuscrit. Définissons le potentiel  $V_i$  d'un diffuseur situé en  $\mathbf{r}_i$  :

$$V_i = V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (3.49)$$

Les diffuseurs étant ponctuels et leur distribution étant uniforme, la densité de probabilité de trouver le diffuseur  $i$  en  $\mathbf{r}_i$  vaut simplement :

$$p(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{V_{\text{Milieu}}} \quad (3.50)$$

avec  $V_{\text{Milieu}}$  le volume du milieu étudié. Le potentiel moyen vaut donc :

$$\begin{aligned} \overline{V_i} &= \int p(\mathbf{r}_i) V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i \\ &= \frac{V}{V_{\text{Milieu}}} \end{aligned} \quad (3.51)$$

---

6. De plus, même pour des expressions simples de potentiel, la sommation (3.47) n'a pas de solution analytique.

et l'on peut vérifier que les diffuseurs ne sont pas corrélés :

$$\begin{aligned}\overline{V_i V_j} &= V^2 \int \int \frac{1}{V_{\text{Milieu}}^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) d\mathbf{r}_i d\mathbf{r}_j \\ &= \frac{V^2}{V_{\text{Milieu}}^2} \\ &= \overline{V_i} \overline{V_j}\end{aligned}\tag{3.52}$$

Le potentiel total du milieu  $V_{\text{tot}}$  s'écrit alors comme la somme des potentiels de chacun des diffuseurs :

$$V_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N V_i \tag{3.53}$$

En insérant ce potentiel dans le développement de la fonction de Green (3.47), on obtient :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \sum_i \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_i \mathbf{G}_0 + \sum_{i,j} \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_i \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_j \mathbf{G}_0 + \sum_{i,j,k} \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_i \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_j \mathbf{G}_0 \mathbf{V}_k \mathbf{G}_0 + \dots \tag{3.54}$$

Chacun de ces termes s'interprète comme une séquence donnée de diffusions, entrecoupée de propagations libres dans le milieu homogène sous-jacent (voir Figure 3.3).

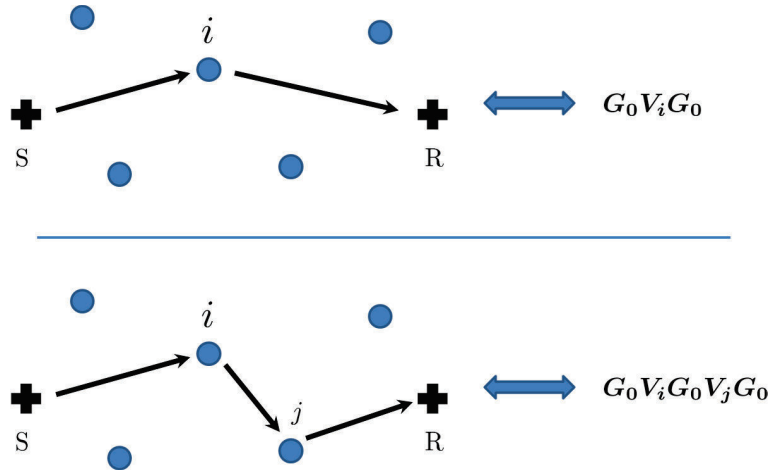


FIGURE 3.3 – Représentation schématique des différents termes du développement perturbatif de la fonction de Green dans l'ISA.

Après application de la moyenne d'ensemble au développement (3.54), la fonction de Green moyenne (3.48) s'écrit :



$$\overline{G} = G_0 + \sum_i G_0 \overline{V}_i G_0 + \sum_{i,j} G_0 \overline{V}_i G_0 \overline{V}_j G_0 + \sum_{i,j,k} G_0 \overline{V}_i G_0 \overline{V}_j G_0 \overline{V}_k G_0 + \dots \quad (3.55)$$

où la césure des corrélations de potentiels est permise par l'indépendance des diffuseurs (3.52). En se rappelant l'expression de la matrice  $\mathbf{T}$  à partir d'un potentiel (3.28), on peut réécrire ce développement comme :

$$\overline{G} = G_0 + \sum_i G_0 \overline{\mathbf{t}}_i G_0 + \sum_{i,j \neq i} G_0 \overline{\mathbf{t}}_i G_0 \overline{\mathbf{t}}_j G_0 + \sum_{i,j \neq i, k \neq j} G_0 \overline{\mathbf{t}}_i G_0 \overline{\mathbf{t}}_j G_0 \overline{\mathbf{t}}_k G_0 + \dots \quad (3.56)$$

où la matrice  $\mathbf{T}$  moyenne du diffuseur  $i$  s'écrit :  $\overline{\mathbf{t}}_i = \overline{V}_i + \overline{V}_i G_0 \overline{V}_i + \overline{V}_i G_0 \overline{V}_i G_0 \overline{V}_i + \dots$

Le nombre de diffuseurs étant grand, on peut lever la restriction sur les indices de sommation pour obtenir finalement :

$$\begin{aligned} \overline{G} &= G_0 + \sum_i G_0 \overline{\mathbf{t}}_i G_0 + \sum_{i,j} G_0 \overline{\mathbf{t}}_i G_0 \overline{\mathbf{t}}_j G_0 + \sum_{i,j,k} G_0 \overline{\mathbf{t}}_i G_0 \overline{\mathbf{t}}_j G_0 \overline{\mathbf{t}}_k G_0 + \dots \\ &= G_0 + G_0 \left( \sum_i \overline{\mathbf{t}}_i \right) \overline{G} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Cette équation correspond à l'équation de Dyson dans l'ISA. L'équation de Dyson définit la fonction de Green moyenne par récurrence et s'écrit dans le cas général :

$$\overline{G} = G_0 + G_0 \Sigma \overline{G} \quad (3.58)$$

L'opérateur  $\Sigma$ , appelé énergie-propre, correspond par construction à la somme d'une infinité de termes décrivant les différentes corrélations entre diffuseurs.

Dans le cadre de l'ISA, les corrélations entre diffuseurs étant nulles, le seul terme contribuant à l'énergie propre se trouve dans l'équation (3.57) et se calcule :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \overline{\mathbf{t}}_i &= \sum_{i=1}^N \int p(\mathbf{r}_i) \mathbf{t}_i d\mathbf{r}_i \\ &= \frac{N}{V_{\text{Milieu}}} \mathbf{t}(\omega) \mathbf{I}_d \end{aligned} \quad (3.59)$$

en utilisant l'expression de la matrice  $\mathbf{T}$  d'un diffuseur ponctuel (3.30) et en notant  $\mathbf{I}_d$  la matrice identité. Soit  $n = N/V_{\text{Milieu}}$  la densité de diffuseur dans le milieu, alors l'énergie propre s'écrit simplement dans l'ISA :

$$\Sigma_{\text{ISA}} = n \mathbf{t} \quad (3.60)$$

Cette approximation décrit correctement les milieux dilués, pour lesquels les interactions entre diffuseurs sont négligeables. L'onde moyenne voit alors un milieu effectif caractérisé par une densité  $n$  de diffuseurs de matrice  $\mathbf{t}$ . En représentation spatiale, l'équation de Dyson s'écrit :

$$\overline{G}(\omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}) = G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{s}) + \iint G_0(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \Sigma(\omega, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \overline{G}(\omega, \mathbf{r}_2 - \mathbf{s}) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (3.61)$$

en notant que les fonctions sont invariantes par translation. En reconnaissant un double produit de convolution, l'équation se simplifie dans l'espace  $(\omega, \mathbf{k})$  :

$$\hat{\overline{G}}(\omega, \mathbf{k}) = \hat{G}_0(\omega, \mathbf{k}) + \hat{G}_0(\omega, \mathbf{k}) \Sigma(\omega, \mathbf{k}) \hat{\overline{G}}(\omega, \mathbf{k}) \quad (3.62)$$

En supposant  $\Sigma$  indépendant de  $\mathbf{k}$ , ce qui est le cas pour des diffuseurs suffisamment petits, et en se rappelant l'expression de  $\hat{G}_0(\omega, \mathbf{k})$  (3.10), on obtient :

$$\hat{\overline{G}}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{k_0^2 - k^2 - \Sigma} \quad (3.63)$$

soit dans le cas de l'ISA :

$$\hat{\overline{G}}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{k_0^2 - k^2 - n\mathbf{t}} \quad (3.64)$$

En posant  $k_{\text{eff}}^2 = k_0^2 - n\mathbf{t}$  et en repassant dans l'espace réel, on trouve :

$$\overline{G}^{\pm}(\omega, \mathbf{R}) = -\frac{e^{\pm i k_{\text{eff}} |\mathbf{R}|}}{4\pi |\mathbf{R}|} \quad (3D) \quad (3.65)$$

La fonction de Green moyenne s'écrit de façon similaire à la fonction de Green du milieu homogène mais avec un nombre d'onde effectif complexe. Un milieu dilué implique une faible densité de diffuseurs, on peut alors approximer le nombre d'onde effectif :

$$\begin{aligned} k_{\text{eff}} &= k_0 \sqrt{1 - \frac{n\mathbf{t}}{k_0^2}} \\ &\simeq k_0 - \frac{n\mathbf{t}}{2k_0} \\ &\simeq k_1 + i \frac{n\sigma}{2} \end{aligned} \quad (3.66)$$

en utilisant le théorème optique (3.46) et en posant  $k_1 = k_0 - \frac{n\Re(\mathbf{t})}{2k_0}$ . On observe alors que la fonction de Green moyenne (causale), ou onde cohérente, décroît exponentiellement en

$n\sigma/2$ . On rappelle que  $\sigma$  correspond à la section efficace de chacun des diffuseurs inclus dans le milieu.

L'intensité cohérente est par définition proportionnelle au carré du module de l'onde cohérente,  $I_c \propto \overline{G^+} \cdot \overline{G^-}$ , et décroît donc exponentiellement en  $n\sigma$ . On peut finalement écrire :

$$\overline{G^+}(\omega, \mathbf{R}) = -\frac{e^{ik_1|\mathbf{R}|}}{4\pi|\mathbf{R}|} e^{-\frac{|\mathbf{R}|}{2\ell}} \quad (3.67)$$

où le libre parcours moyen de diffusion  $\ell$  vaut :

$$\ell = \frac{1}{n\sigma} \quad (3.68)$$

C'est la distance caractéristique de décroissance de l'intensité cohérente dans l'ISA. Elle correspond qualitativement à la distance typique entre deux événements de diffusion. Pour l'étude de milieux dont l'épaisseur est de l'ordre de cette distance  $\ell$ , l'onde cohérente est un outil adapté (Derode *et al.*, 2001). Il existe également des corrections à l'ISA qui permettent de prendre en compte une partie de l'effet des corrélations entre diffuseurs lorsque la concentration augmente (Waterman et Truell, 1961; Lloyd et Berry, 1967). L'influence de ces corrélations sur le libre parcours moyen de diffusion a été étudiée expérimentalement par Derode *et al.* (2006).

Toutefois, au-delà de plusieurs libre parcours moyens, l'onde cohérente est trop atténuée pour pouvoir être utilisée en pratique<sup>7</sup>. Seule l'intensité dite incohérente est accessible. Celle-ci se calcule comme la moyenne d'ensemble du carré de l'amplitude, et sa description fait l'objet de la section suivante.

### 3.3 Description de l'intensité

Dans un milieu dont l'épaisseur est de plusieurs libre parcours moyens, l'intensité transmise est essentiellement constituée d'ondes ayant subi un nombre important de collisions avec le milieu. Les fluctuations spatio-temporelles de cette intensité paraissent aléatoires et dépendent de la position de chacune des hétérogénéités. Elles sont observables sous forme de figures appelées tavelures (speckle).

De manière similaire au paragraphe précédent, pour nous affranchir d'une réalisation particulière du désordre, nous allons étudier le comportement de la moyenne d'ensemble de l'intensité.

Par définition, l'intensité est proportionnelle à  $p(t, \mathbf{s}, \mathbf{r})$ , le carré du module du champ :

---

7. C'est essentiellement vrai pour les milieux où le désordre est figé (milieux solides par exemple). Par contre, dans des fluides comportant des diffuseurs en suspension, l'évolution naturelle du milieu permet de moyenner amplement sur le désordre et de mesurer l'onde cohérente à travers de grandes épaisseurs.

$$p(t, \mathbf{s}, \mathbf{r}) = |g(t, \mathbf{s}, \mathbf{r})|^2 = g(t, \mathbf{s}, \mathbf{r})g^*(t, \mathbf{s}, \mathbf{r}) \quad (3.69)$$

où  $g(t, \mathbf{s}, \mathbf{r})$  est la fonction de Green temporelle du milieu hétérogène, pour une source placée en  $\mathbf{s}$  et un récepteur en  $\mathbf{r}$ . En suivant l'approche de Sheng (2006), décomposons  $g$  et  $g^*$  en composantes fréquentielles :

$$\begin{aligned} g(t, \mathbf{s}, \mathbf{r}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G^+(\omega_1, \mathbf{s}, \mathbf{r}) e^{-i\omega_1 t} d\omega_1, \\ g^*(t, \mathbf{s}, \mathbf{r}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G^-(\omega_2, \mathbf{s}, \mathbf{r}) e^{i\omega_2 t} d\omega_2 \end{aligned} \quad (3.70)$$

$G^+$  et  $G^-$  correspondent aux fonctions de Green causale et acausale de l'équation de Helmholtz en milieu hétérogène. Le carré du champ s'écrit alors :

$$p(t, \mathbf{s}, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G^+(\omega_1, \mathbf{s}, \mathbf{r}) G^-(\omega_2, \mathbf{s}, \mathbf{r}) e^{-i\Delta\omega t} d\omega_1 d\omega_2 \quad (3.71)$$

où  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$  correspond à la différence de pulsation des deux signaux. La dépendance de l'intégrande en  $e^{-i\Delta\omega t}$  implique que les contributions à l'intensité sont non négligeables seulement pour  $\Delta\omega \leq \frac{1}{t}$ . En particulier, aux temps longs devant la période centrale des signaux, les contributions sont limitées à :

$$\Delta\omega \ll \omega_c \quad (3.72)$$

avec  $\omega_c$  la pulsation centrale des signaux. Pour en clarifier les implications physiques, regardons les composantes fréquentielles de  $p$  :

$$P(\Omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t, \mathbf{s}, \mathbf{r}) e^{i\Omega t} dt \quad (3.73)$$

soit en insérant l'expression temporelle (3.71) :

$$P(\Omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G^+(\omega_1, \mathbf{s}, \mathbf{r}) G^-(\omega_2, \mathbf{s}, \mathbf{r}) \delta(\Delta\omega - \Omega) d\omega_1 d\omega_2 \quad (3.74)$$

en identifiant  $\delta(\Delta\omega - \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\Delta\omega - \Omega)t} dt$ . Les différences de pulsations entre les deux fonctions de Green correspondent donc aux composantes fréquentielles de l'intensité. Ces fréquences de battement décrivent en effet l'évolution de l'enveloppe du paquet d'onde, c'est à dire l'intensité.

Enfin le changement de variable  $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  et  $\Omega = \omega_1 - \omega_2$  ainsi que l'application de la moyenne d'ensemble nous permettent d'écrire :

$$\overline{P}(\Omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G^+(\omega + \frac{\Omega}{2}, \mathbf{s}, \mathbf{r}) G^-(\omega - \frac{\Omega}{2}, \mathbf{s}, \mathbf{r})} d\omega \quad (3.75)$$

La fréquence  $\omega$  est appelée fréquence interne et décrit les variations rapides du champ d'onde. La fréquence  $\Omega$  est appelée fréquence externe et décrit les variations lentes de la moyenne d'ensemble de l'intensité.

Pour alléger les notations, considérons à partir d'ici que les fonctions de Green  $\mathbf{G}^+$  et  $\mathbf{G}^-$  sont implicitement évaluées aux fréquences respectives  $\omega + \frac{\Omega}{2}$  et  $\omega - \frac{\Omega}{2}$ . Pour calculer l'intégrande  $\overline{\mathbf{G}^+(\mathbf{s}, \mathbf{r})\mathbf{G}^-(\mathbf{s}, \mathbf{r})}$ , il est nécessaire de remplacer les fonctions de Green par leurs développements étudiés dans la section précédente (éq. 3.54) :

$$\begin{aligned}\mathbf{G}^+ &= \mathbf{G}_0^+ + \sum_i \mathbf{G}_0^+ \mathbf{V}_i \mathbf{G}_0^+ + \sum_{i,j} \mathbf{G}_0^+ \mathbf{V}_i \mathbf{G}_0^+ \mathbf{V}_j \mathbf{G}_0^+ + \sum_{i,j,k} \mathbf{G}_0^+ \mathbf{V}_i \mathbf{G}_0^+ \mathbf{V}_j \mathbf{G}_0^+ \mathbf{V}_k \mathbf{G}_0^+ + \dots, \\ \mathbf{G}^- &= \mathbf{G}_0^- + \sum_i \mathbf{G}_0^- \mathbf{V}_i \mathbf{G}_0^- + \sum_{i,j} \mathbf{G}_0^- \mathbf{V}_i \mathbf{G}_0^- \mathbf{V}_j \mathbf{G}_0^- + \sum_{i,j,k} \mathbf{G}_0^- \mathbf{V}_i \mathbf{G}_0^- \mathbf{V}_j \mathbf{G}_0^- \mathbf{V}_k \mathbf{G}_0^- + \dots\end{aligned}\quad (3.76)$$

où  $\mathbf{G}_0^+$  et  $\mathbf{G}_0^-$  dénotent les fonctions de Green causale et acausale du milieu uniforme. On rappelle que l'on se situe dans l'ISA et que  $\mathbf{V}_i$  désigne le potentiel du diffuseur ponctuel  $i$ .

La multiplication de ces deux fonctions engendre un nombre important de termes. Cependant, lors de l'application de la moyenne d'ensemble, on peut montrer que l'ISA implique que seule une partie restreinte de ces termes subsiste. L'intégrande  $\overline{\mathbf{G}^+\mathbf{G}^-}$  ne contient plus que les paires de trajectoires pour lesquelles la séquence de diffuseurs parcourus est identique (voir Figure 3.4). Cette propriété découle du régime dilué  $\ell \gg \lambda$  sous tendu par l'ISA. En effet, les longueurs de trajectoires associées à deux séquences de diffusions distinctes diffèrent au moins de l'ordre de  $\ell$ . Le déphasage associé est alors largement supérieur à  $2\pi$  et les contributions à l'intensité deviennent nulles en moyenne.

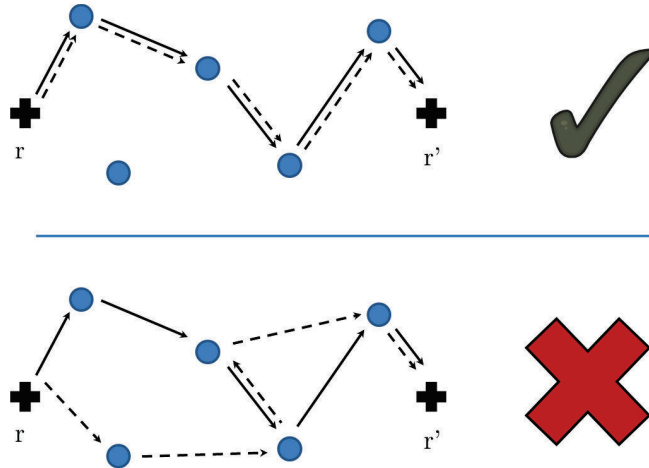


FIGURE 3.4 – Représentation schématique de termes intervenant dans le calcul de l'intensité. Une conséquence de l'ISA est que lors de l'application de la moyenne d'ensemble, seuls les termes parcourant la même séquence de diffuseurs subsistent (schéma du haut). Les autres termes (schéma du bas) impliquent un grand déphasage entre fonctions de Green et ont une contribution nulle en moyenne.

La moyenne d'ensemble a également pour effet de remplacer les fonctions de Green du milieu homogène par les fonctions de Green moyennes. On peut alors écrire le terme d'intensité sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \overline{G^+(\mathbf{s}, \mathbf{r})G^-(\mathbf{s}, \mathbf{r})} = & \overline{G^+}(\mathbf{s}, \mathbf{r})\overline{G^-}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) \\ & + \int \overline{G^+}(\mathbf{s}, \mathbf{r}_1)\overline{G^-}(\mathbf{s}, \mathbf{r}_1)\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\overline{G^+}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r})\overline{G^-}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r})d\mathbf{r}_1d\mathbf{r}_2 \end{aligned} \quad (3.77)$$

où la fonction  $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  porte le nom de facteur de structure et prend en compte toutes les séquences de diffusions possibles entre les points  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ . Dans l'ISA, cette fonction satisfait par construction l'équation intégrale suivante (similaire à l'équation de Dyson (3.58) pour  $\overline{\mathbf{G}}$ ), appelée équation de Bethe-Salpether :

$$\Gamma = \sum_i \overline{\mathbf{t}_i^+ \mathbf{t}_i^-} + \sum_i \overline{\mathbf{t}_i^+ \mathbf{t}_i^-} \overline{\mathbf{G}^+} \overline{\mathbf{G}^-} \Gamma \quad (3.78)$$

où l'on reconnaît l'expression  $\mathbf{t}_i$  désignant la matrice  $\mathbf{T}$  du diffuseur ponctuel  $i$ . Similairement au calcul de l'énergie-propre (3.59), on peut calculer la moyenne d'ensemble  $\sum_i \overline{\mathbf{t}_i^+ \mathbf{t}_i^-}$  :

$$\sum_i \overline{\mathbf{t}_i^+ \mathbf{t}_i^-} = n \mathbf{t} \mathbf{t}^* \mathbf{I}_d \quad (3.79)$$

où  $\mathbf{I}_d$  désigne la matrice identité et  $n$  la densité de diffuseurs dans le milieu. Dans le domaine spatial et dans le cadre de l'ISA, l'équation de Bethe-Salpether s'écrit alors :

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = n \mathbf{t} \mathbf{t}^* \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + n \mathbf{t} \mathbf{t}^* \int \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) \overline{\mathbf{G}^+}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \overline{\mathbf{G}^-}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r} \quad (3.80)$$

Cette équation sert de point de départ à la dérivation analytique de l'équation du transfert radiatif et de l'équation de la diffusion. Nous établissons dans le paragraphe suivant les étapes principales de la dérivation de la diffusion. L'équation du transfert radiatif, qui est plus précise mais aussi bien plus complexe à dériver, sera simplement introduite et commentée.

## 3.4 Équations et solutions du transport

### 3.4.1 Le régime diffusif

Aux temps longs, c'est à dire après un grand nombre d'interactions avec les défauts du milieu, les variations spatiales du facteur de structure  $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  sont faibles à l'échelle du libre parcours moyen  $\ell$ , contrairement à la décroissance de l'intensité cohérente  $\overline{G^+ G^-}$ . C'est une caractéristique du régime diffusif, atteint pour  $t \gg \tau$ , avec  $\tau = \frac{\ell}{c}$  le temps

libre moyen<sup>8</sup>. Dans ce régime,  $\Gamma$  peut donc être sorti de l'intégrale de l'équation (3.77) décrivant le terme d'intensité :

$$\begin{aligned} \overline{G^+(\mathbf{s}, \mathbf{r})G^-(\mathbf{s}, \mathbf{r})} &\simeq \Gamma(\mathbf{s}, \mathbf{r}) \int \overline{G^+(\mathbf{s}, \mathbf{r}_1)G^-(\mathbf{s}, \mathbf{r}_1)} \overline{G^+(\mathbf{r}_2, \mathbf{r})G^-(\mathbf{r}_2, \mathbf{r})} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \\ &= \Gamma(\mathbf{s}, \mathbf{r}) \int \overline{G^+(\mathbf{s}, \mathbf{r}_1)G^-(\mathbf{s}, \mathbf{r}_1)} d\mathbf{r}_1 \int \overline{G^+(\mathbf{r}_2, \mathbf{r})G^-(\mathbf{r}_2, \mathbf{r})} d\mathbf{r}_2 \\ &= \Gamma(\mathbf{s}, \mathbf{r})(I_{11})^2 \end{aligned} \quad (3.81)$$

Le calcul des intégrales de l'intensité cohérente est un cas particulier d'une famille d'intégrales appelées intégrales de boucles. Ces calculs sont présentés en annexe (éq. A.9 et éq. A.15). La valeur de l'intégrale dépend de la dimension de l'espace et sera notée  $I_{11}$  dans la suite du calcul, pour rester général.

Dans notre approximation de diffuseurs isotropes, le terme  $n\mathbf{t}\mathbf{t}^*$  de l'équation de Bethe-Salpether (3.80) se calcule grâce aux définitions de la section efficace (3.45) et du libre parcours moyen (3.68) :

$$n\mathbf{t}\mathbf{t}^* = \frac{1}{I_{11}} \quad (3.82)$$

Le résultat dépend de la dimension et correspond à l'inverse de l'intégrale de boucle introduite précédemment. Cette identité tient du lien existant entre la décroissance de l'intensité cohérente et la section efficace des diffuseurs.

Dans ce régime diffusif, on peut également approximer les variations spatiales de  $\Gamma$  à l'aide d'un développement limité. On peut alors montrer (Akkermans et Montambaux (2004), p.114) que l'équation de Bethe-Salpether (3.80) peut se mettre sous la forme d'une équation de diffusion (en fréquence) pour  $\Gamma$  :

$$(-i\Omega - D\Delta_{\mathbf{r}_2})\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{c}{I_{11}\ell}\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (3.83)$$

où la constante de diffusion vaut  $D = \frac{c\ell}{d}$ , avec  $c$  la vitesse des ondes cohérentes et  $d$  la dimension de l'espace. Dans les approximations présentes, le milieu étant très dilué (ISA) et les diffuseurs étant très petits, la vitesse de l'onde cohérente est quasiment égale à la vitesse du milieu uniforme  $c \simeq c_0$ . Ces deux vitesses seront considérées comme égales dans la suite du manuscrit. Il est important de rappeler ici que  $\Gamma$  dépend toujours des fréquences externe ( $\Omega$ ) et interne ( $\omega$ ) des signaux. La dépendance en  $\omega$  peut être négligée en supposant les signaux filtrés dans une bande de fréquence étroite<sup>9</sup>.

Le terme d'intensité  $\overline{G^+G^-}$  étant proportionnel à  $\Gamma(\mathbf{s}, \mathbf{r})$  (3.81), on définit l'intensité diffusive  $I_{\Omega}^{\text{Diff}}$  comme solution de l'équation de diffusion (en fréquence) normalisée :

---

8. Équivalent temporel du libre parcours moyen, c'est le temps typique de propagation libre entre deux événements de diffusion.

9. La fréquence centrale des signaux détermine la valeur de la section efficace des diffuseurs du milieu et donc du libre parcours moyen  $\ell$ .

$$(-i\Omega - D\Delta_{\mathbf{r}})I_{\Omega}^{\text{Diff}}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{s} - \mathbf{r}) \quad (3.84)$$

avec

$$\begin{aligned} I_{\Omega}^{\text{Diff}}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) &= \frac{\ell I_{11}}{c} \Gamma(\mathbf{s}, \mathbf{r}) \\ &= \frac{\ell}{c I_{11}} \overline{G^+(\mathbf{s}, \mathbf{r}) G^-(\mathbf{s}, \mathbf{r})} \end{aligned} \quad (3.85)$$

où la solution  $I_{\Omega}^{\text{Diff}}$  est trouvée par identification avec l'équation de diffusion pour  $\Gamma$  (3.83). En remplaçant les valeurs de l'intégrale  $I_{11}$  (A.18 et A.23), on trouve les constantes de normalisation qui définissent l'intensité diffuse à 2D comme à 3D :

$$I_{\Omega}^{\text{Diff}}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \frac{4k_0}{c} \overline{G^+(\mathbf{s}, \mathbf{r}) G^-(\mathbf{s}, \mathbf{r})} \quad (2\text{D})$$

$$I_{\Omega}^{\text{Diff}}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} \overline{G^+(\mathbf{s}, \mathbf{r}) G^-(\mathbf{s}, \mathbf{r})} \quad (3\text{D}) \quad (3.86)$$

Pour finir, la résolution de l'équation de diffusion (3.84) et le retour dans le domaine temporel nous permettent d'obtenir les solutions bien connues :

$$I_{2\text{D}}^{\text{Diff}}(R, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)} e^{-\frac{R^2}{4Dt}} \quad (2\text{D})$$

$$I_{3\text{D}}^{\text{Diff}}(R, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{R^2}{4Dt}} \quad (3\text{D}) \quad (3.87)$$

Cette solution permet de décrire le transport de l'énergie dans un milieu infini, aux temps longs devant le temps libre moyen  $\tau = \frac{\ell}{c}$ . Elle est invariante par translation et ne dépend que de la distance  $R = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|$ . La constante de diffusion vaut  $D = \frac{c\ell}{2}$  à 2D et  $D = \frac{c\ell}{3}$  à 3D.

La comparaison de cette solution avec celle de l'équation du transfert radiatif est présentée dans la section suivante.

### 3.4.2 Équation du transfert radiatif

Dans le cadre de l'ISA et pour des diffuseurs de géométries quelconques, on peut montrer que l'équation de Bethe-Salpether (3.80) se ramène à l'équation de transfert radiatif introduite à l'origine de façon phénoménologique par Chandrasekhar (1960). Pour une revue détaillée de sa dérivation analytique, on pourra consulter par exemple la revue de Legendijk et Van Tiggelen (1996). Cette équation décrit l'intensité spécifique



$I_s(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{u}})$ , qui correspond à la quantité d'énergie traversant la surface de normale  $\hat{\mathbf{u}}$ , par unité de temps, de surface et d'angle solide.

L'équation du transfert radiatif s'écrit :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_s(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{u}})}{\partial t} + \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla I_s(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{\ell} I_s(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{u}}) + n \int \frac{d\sigma}{d\Omega}(\hat{\mathbf{u}}', \hat{\mathbf{u}}) I_s(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{u}}') d\Omega + \frac{1}{c} S(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{u}}) \quad (3.88)$$

Le membre de gauche décrit les variations spatio-temporelles de l'intensité spécifique dans la direction  $\hat{\mathbf{u}}$ . Le premier terme du membre de droite correspond aux pertes d'énergie par diffusion hors de la direction  $\hat{\mathbf{u}}$ . Le second terme du membre de droite correspond au gain d'énergie par diffusion de toutes les directions  $\hat{\mathbf{u}}'$  vers la direction  $\hat{\mathbf{u}}$ , et dépend donc de la section efficace différentielle de diffusion  $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\hat{\mathbf{u}}', \hat{\mathbf{u}})$ . Le dernier terme correspond aux sources éventuelles d'énergie dans le milieu.

Dans le cas général de diffuseurs anisotropes, cette équation n'a pas de solution analytique exacte. Cependant, on peut imaginer qu'après un grand nombre de collisions, c'est à dire en régime diffusif, la répartition angulaire de l'intensité spécifique devient quasiment isotrope. On peut alors montrer (Lagendijk et Van Tiggelen, 1996) que l'équation de transfert radiatif se ramène à une équation de diffusion pour l'intensité. L'intensité est obtenue par intégration de l'intensité spécifique sur toutes les directions. On note que l'on utilisera souvent abusivement le terme d'intensité pour désigner la densité d'énergie, ces deux grandeurs étant proportionnelles. Cette nouvelle équation de diffusion s'écrit dans le domaine temporel :

$$\frac{\partial I(r, t)}{\partial t} - D \Delta I(r, t) = \delta(r) \delta(t) \quad (3.89)$$

où la constante de diffusion vaut ici  $D = \frac{c\ell^*}{d}$ .  $\ell^*$  s'appelle libre parcours moyen de transport et  $d$  représente la dimension de l'espace. Le libre parcours moyen de transport  $\ell^*$  diffère du libre parcours moyen  $\ell$  d'un facteur d'anisotropie de diffusion :

$$\ell^* = \frac{\ell}{1 - \langle \cos \theta \rangle} \quad (3.90)$$

où  $\langle \cos \theta \rangle$  est la moyenne du cosinus de l'angle de diffusion. Cette moyenne est effectuée sur tout l'angle solide et pondérée par la section efficace différentielle de diffusion correspondante.

Pour des diffuseurs ponctuels, donc isotropes, on a  $\ell = \ell^*$ . Par contre, pour de gros diffuseurs, la diffusion étant très « piquée » vers l'avant,  $\ell^*$  et  $\ell$  peuvent différer notablement. L'introduction de l'angle  $\langle \cos \theta \rangle$  permet d'annuler la contribution de la diffusion dans la direction incidente. La grandeur  $\ell^*$  caractérise alors la distance de propagation après laquelle « l'onde a perdu la mémoire de sa direction incidente » (Lagendijk et Van Tiggelen, 1996).

Par analogie avec la définition du libre parcours moyen (3.68), on définit la section efficace de transport  $\sigma^*$  telle que :

$$\ell^* = \frac{1}{n\sigma^*} \quad (3.91)$$

avec

$$\sigma^* = \int_0^{2\pi} \sigma_\theta(\theta)(1 - \cos \theta) d\theta \quad (2D) \quad (3.92)$$

$$\sigma^* = 2\pi \int_0^\pi \sigma_\theta(\theta)(1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (3D) \quad (3.92)$$

Dans le cas de diffuseurs isotropes, il existe une solution analytique du transfert radiatif à 2D. Cette solution a été dérivée initialement par Shang et Gao (1988), décrite également dans un contexte sismologique par Sato (1993). L'intensité solution s'écrit :

$$I_{2D}^{TR}(r, t) = \frac{e^{-\frac{r}{\ell}}}{2\pi r c} \delta(t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{4\pi D t} \left(1 - \frac{r^2}{c^2 t^2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{\ell}(\sqrt{c^2 t^2 - r^2} - ct)} \Theta(ct - r) \quad (3.93)$$

où le libre parcours moyen  $\ell$  est égal au libre parcours moyen de transport  $\ell^*$ . L'invariance par translation implique là encore que l'intensité ne dépend que de la distance  $r$  de transport et du temps  $t$  d'observation. La constante de diffusion vaut  $D = c\ell/2$  avec  $c$  la vitesse des ondes. La fonction de Heaviside  $\Theta$  assure la causalité du transport.

Cette solution est composée de l'intensité cohérente, qui décroît exponentiellement avec le libre parcours moyen<sup>10</sup> et d'une intensité diffuse, qui comprend tous les ordres de diffusions. On peut vérifier que ce terme diffus converge vers la solution de la diffusion pour  $t \gg \frac{r}{c}$ .

À 3D, une solution approximative mais précise a été développée par Paasschens (1997), par interpolation des solutions exactes en dimensions 2 et 4. Cette solution s'écrit :

$$\begin{aligned} I_{3d}^{TR}(r, t) &= \frac{e^{-\frac{r}{\ell}}}{4\pi r^2 c} \delta(t - \frac{r}{c}) + \frac{\left(1 - \frac{r^2}{c^2 t^2}\right)^{\frac{1}{8}}}{(4\pi D t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{ct}{\ell}} \\ &\quad \times G\left(\frac{ct}{\ell} \left[1 - \frac{r^2}{c^2 t^2}\right]^{\frac{3}{4}}\right) \Theta(ct - r), \\ G(x) &= 8(3x)^{-\frac{3}{2}} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{3}{4}N + \frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4}N)} \frac{x^N}{N!} \simeq e^x \sqrt{1 + 2.026/x} \end{aligned} \quad (3.94)$$

La solution de la diffusion est ici retrouvée pour  $t \gg \frac{\ell}{c}, \frac{r}{c}$ .

10. Cette propriété a été démontrée dans la section 3.2.3.

Nous pouvons à présent comparer les solutions de l'intensité dans l'approximation de la diffusion et dans l'approximation du transfert radiatif. Dans les Figures 3.5 et 3.6, nous étudions les solutions pour un milieu 2D infini en fonction du temps et de la distance respectivement. Dans les Figures 3.7 et 3.8, nous étudions les solutions pour un milieu 3D infini en fonction du temps et de la distance respectivement.

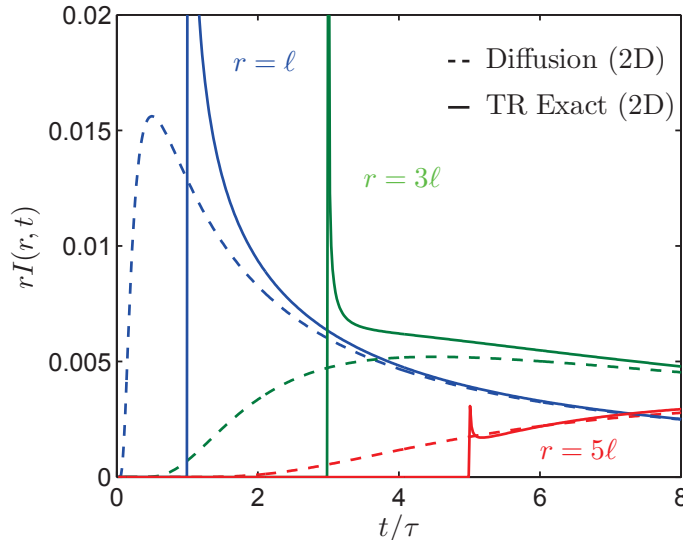


FIGURE 3.5 – Solution exacte du Transfert Radiatif 2D (trait fort) et de la diffusion 2D (tirets) en fonction du temps pour trois distances différentes :  $r = \ell$  (bleu),  $r = 3\ell$  (vert),  $r = 5\ell$  (rouge). L'atténuation géométrique est compensée pour une meilleure visualisation en multipliant l'intensité par la distance  $r$ . Le temps est normalisé par le temps libre moyen  $\tau = \ell/c$ .

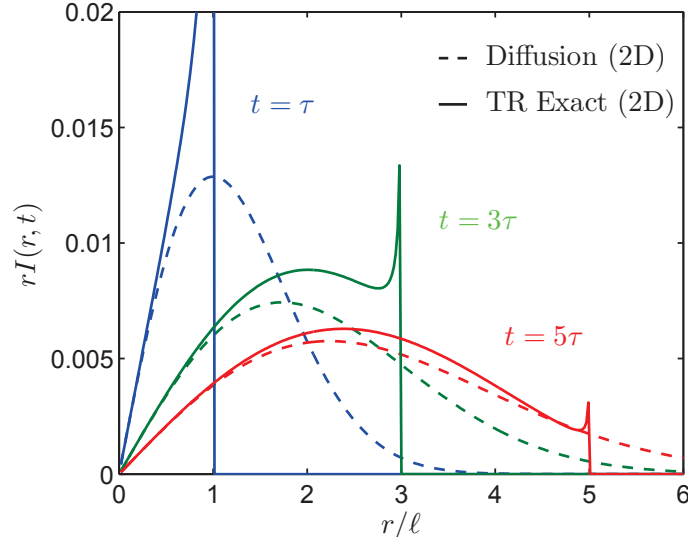


FIGURE 3.6 – Solution exacte du Transfert Radiatif 2D (trait fort) et de la diffusion 2D (tirets) en fonction de la distance pour trois temps différents :  $t = \tau$  (bleu),  $t = 3\tau$  (vert),  $t = 5\tau$  (rouge). L'atténuation géométrique est compensée pour une meilleure visualisation en multipliant l'intensité par la distance  $r$ . La distance est normalisée par le libre parcours moyen  $\ell$ .

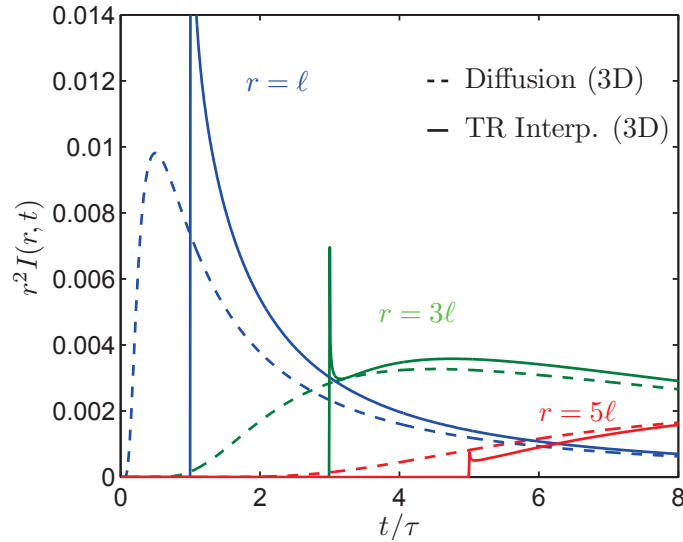


FIGURE 3.7 – Solution interpolée du Transfert Radiatif 3D (trait fort) et solution de la diffusion 3D (tirets) en fonction du temps pour trois distances différentes :  $r = \ell$  (bleu),  $r = 3\ell$  (vert),  $r = 5\ell$  (rouge). L'atténuation géométrique est compensée pour une meilleure visualisation en multipliant l'intensité par le carré de la distance  $r^2$ . Le temps est normalisé par le temps libre moyen  $\tau = \ell/c$ .

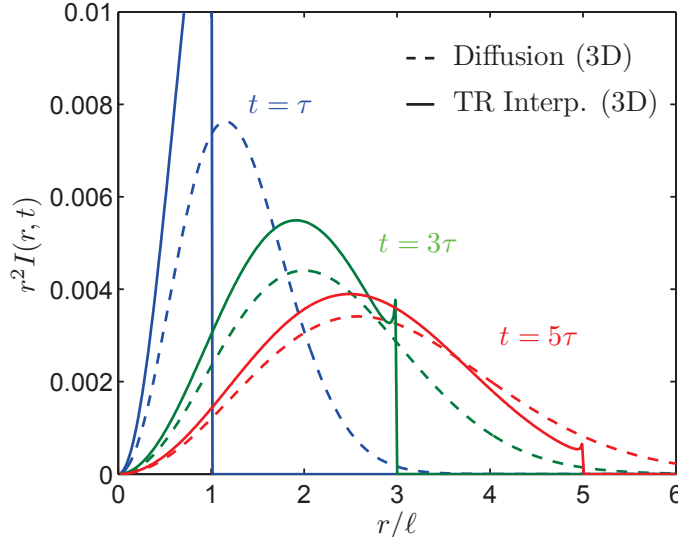


FIGURE 3.8 – Solution interpolée du Transfert Radiatif 3D (trait fort) et solution de la diffusion 3D (tirets) en fonction de la distance pour trois temps différents :  $t = \tau$  (bleu),  $t = 3\tau$  (vert),  $t = 5\tau$  (rouge). L'atténuation géométrique est compensée pour une meilleure visualisation en multipliant l'intensité par le carré de la distance  $r^2$ . La distance est normalisée par le libre parcours moyen  $\ell$ .

Nous observons que la différence entre les deux approximations du transport s'atténue avec le temps. Aux temps courts, l'intensité cohérente est encore importante et la répartition spatiale de l'énergie est mal prédite par la solution de la diffusion. Aux temps plus longs, suite aux nombreuses interactions avec les diffuseurs du milieu, l'intensité cohérente a été majoritairement transformée en intensité incohérente. Cette intensité incohérente est bien répartie spatialement et tend vers la solution de la diffusion.

Ces solutions du transport nous permettent de décrire l'enveloppe, ou l'intensité de signaux acquis dans des milieux hétérogènes. Lorsqu'un changement local se produit dans le milieu, nous verrons que la variation des formes d'ondes (ou décorrélation) peut être décrite à l'aide des différents outils présentés dans ce chapitre. Cette décorrélation s'exprime en effet en fonction de la section efficace de diffusion du changement et d'une combinaison de propagateurs de l'intensité qui dépend de la position des capteurs ainsi que de la position du changement. Cette étude est détaillée dans le chapitre 5 du manuscrit.

Dans le chapitre suivant, nous présentons deux expériences en ultrasons dans le béton afin d'évaluer en pratique si un changement local est détectable (expérience 1) et si sa position a une influence sur les mesures (expérience 2).

## Deuxième partie

Effet d'un changement local sur la  
coda : Le problème direct



# Chapitre 4

## Expériences introductives en ultrasons

Cette deuxième partie du manuscrit concerne l'étude de l'effet d'un changement local en régime de diffusion multiple.

Nous proposons dans ce chapitre d'observer les variations de la coda ultrasonore induites par un changement local dans le béton. Nous présentons pour cela deux expériences introductives. La première expérience vise à démontrer la capacité de la coda à détecter le changement. La seconde vise à illustrer les dépendances spatiale et temporelle des variations de la coda.

Puis, dans les chapitres 5 et 6, nous nous attacherons à modéliser théoriquement les variations de la coda. Nous confronterons également ces modèles à des simulations d'ondes acoustiques et sismiques.

### 4.1 Protocole générique d'acquisition des ultrasons

Nous décrivons ici le protocole d'acquisition utilisé dans les expériences présentées dans le manuscrit. Le volume de béton à surveiller est équipé de transducteurs ultrasonores réciproques. Ces transducteurs de type piézoélectrique peuvent donc être utilisés indifféremment comme source ou comme récepteur. Chaque transducteur est collé sur le béton à l'aide d'une colle chimique adéquate, utilisée généralement pour la pose de jauges de contrainte. Le signal source est généré par une carte électronique, puis amplifié jusqu'à 400Vcc et distribué par un commutateur jusqu'au transducteur souhaité. Nous utilisons la technique de compression temporelle, qui consiste à émettre un signal source sous forme de sinusoïde à rampe de fréquence (chirp). Contrairement à l'émission d'impulsions, cette méthode permet d'étaler dans le temps l'énergie envoyée dans le milieu, et de contrôler naturellement la bande passante de la source. La réponse impulsionnelle du milieu est ensuite calculée par inter-corrélation de la réponse au chirp (enregistrée par le récepteur) avec le signal source.



On note que pour une parfaite répétabilité de l'expérience, l'émission et la réception doivent-être parfaitement synchronisées (déclenchées par la même horloge). Lorsque ce n'est pas le cas, une solution consiste à enregistrer également le signal émis en dérivant la sortie de la carte d'émission sur une entrée secondaire de la carte de réception<sup>1</sup>.

## 4.2 Expérience 1 : Détection de changement local

### 4.2.1 Protocole de l'expérience

Nous utilisons une éprouvette de béton cylindrique de 30cm de diamètre et 30cm de hauteur (Figure 4.1). Deux transducteurs sont collés sur la surface supérieure du bloc, à 20cm de distance. Le premier est utilisé comme source et le second comme récepteur. Durant l'expérience, un petit trou est percé sur la surface supérieure du bloc, à équidistance des deux capteurs. Ce trou de 10mm de profondeur et 5mm de diamètre est petit comparé à la taille du granulat de l'échantillon.

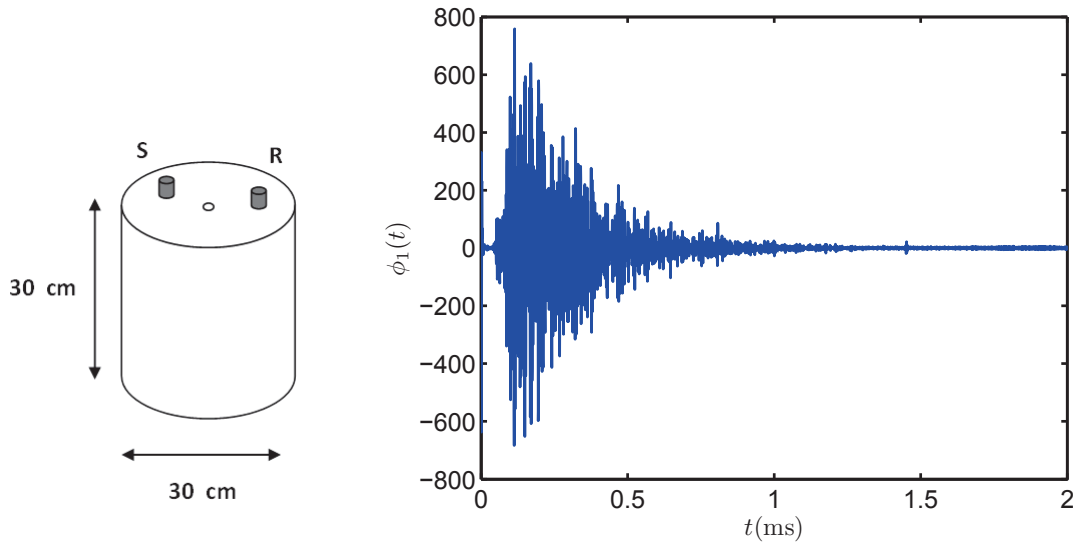


FIGURE 4.1 – À gauche, l'éprouvette de béton surveillée est représentée schématiquement. La source, le récepteur ainsi que le trou percé durant l'expérience sont situés sur la surface supérieure du bloc. À droite, la réponse impulsionnelle  $\phi_1$  de l'état initial est représentée en fonction du temps.

Les chirps sont émis entre 100kHz et 600kHz, et chaque acquisition est composée de 50 chirps de 5ms. Nous imposons un rapport cyclique de 0.2, c'est à dire qu'après chaque chirp de 5ms, une pause de 20ms est respectée. La fréquence d'échantillonnage à l'émission est de 4MHz. Le récepteur est quant à lui relié à une carte d'acquisition

1. Les différentes voies de réception doivent être parfaitement synchronisées entre-elles.

échantillonnant à 2MHz. Les deux cartes étant mal synchronisées, nous enregistrons sur une deuxième voie le signal émis.

Le bloc est surveillé durant 4h, avec une acquisition toutes les 10 minutes, soit 24 acquisitions au total. Le bloc est laissé intact durant toute l'expérience sauf entre les acquisitions 5 et 6 où le trou est percé, et entre les acquisitions 10 et 11 où le trou est rempli d'eau (environ 0.2mL).

### 4.2.2 Traitement des données

**Reconstruction de la réponse impulsionnelle :** Pour chaque acquisition, la réponse impulsionnelle (Figure 4.1) est reconstruite en inter-corrélant la réponse brute enregistrée par le récepteur avec le signal source. Cela revient à inter-corréler les deux canaux de réception, qui sont parfaitement synchronisés. Par cette opération, la réponse est également filtrée dans la bande passante du chirp (100-600kHz). La réponse impulsionnelle associée à l'acquisition  $i$  est notée  $\phi^i(t)$  et constitue l'empreinte du milieu à la date  $i$ .

**Correction du changement global de vitesse et calcul de la décorrélation :** Les variations de température ambiante induisent une variation de la vitesse des ondes dans l'échantillon. En considérant que la température varie faiblement et de façon homogène dans l'éprouvette, on corrige cet effet en appliquant la méthode du stretching (voir section 2.2) à chaque réponse impulsionnelle. La première acquisition est choisie comme référence.

Pour détecter les changements qui se produisent dans le milieu, on calcule ensuite le coefficient de décorrélation entre différentes acquisitions. En comparant les dates  $i$  et  $j$ , ce coefficient s'écrit :

$$DC^{ij}(t) = 1 - \frac{\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \phi^i(t)\phi^j(t)dt}{\sqrt{\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \phi^i(t)^2dt \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \phi^j(t)^2dt}} \quad (4.1)$$

où la mesure est effectuée dans une fenêtre de largeur  $T = 300\mu s$ , située après le temps de thouless<sup>2</sup> dans la coda. Ce coefficient, normalisé entre 0 et 1, mesure la perte de corrélation des ondes de la coda.

### 4.2.3 Résultats et discussion

**Le stretching :** Les coefficients d'étirement  $\epsilon$  (ou variation relative de vitesse apparente) sont représentés au cours de l'expérience dans la Figure 4.2 (à gauche). On observe

---

2. Le temps de thouless correspond au temps d'arrivée du maximum de l'énergie.

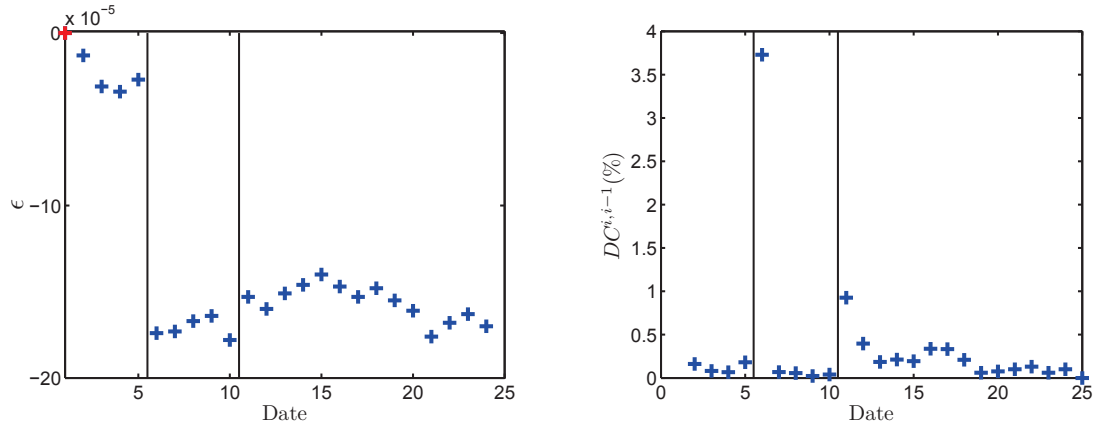


FIGURE 4.2 – À gauche : Coefficient d'étirement  $\epsilon$ , ou variation relative de vitesse apparente des ondes, en fonction de la date de l'acquisition. La référence est l'état initial (date 1, en rouge). À droite : Coefficient de décorrélation calculé de proche en proche. La date  $i$  est comparée à la date précédente  $i - 1$ . Les deux pics de décorrélation correspondent respectivement au perçage ( $\approx 4\%$ ) et à l'injection d'eau ( $\approx 1\%$ ). Ces deux moments sont marqués par des lignes verticales.

que le perçage du trou entraîne une chute de vitesse des ondes. Cet effet inattendu est peut-être relié à de la micro-fracturation générée par le perçage.

**La décorrélation de proche en proche :** La décorrélation calculée de proche en proche (Figure 4.2, à droite) permet de détecter les changements avec une sensibilité maximale<sup>3</sup>. On détecte ici les deux principaux changements, correspondant respectivement au perçage du trou et à l'ajout de l'eau. Il semble également que l'on observe des fluctuations importantes après l'ajout d'eau, plus hautes que les fluctuations suivant le perçage du trou.

**La décorrélation par rapport à l'état « après perçage » (date 6) :** La lecture de la Figure 4.3 (à gauche) permet de distinguer clairement les trois phases de l'expérience. Comme attendu, la phase « avant perçage » est stable (dates 1-5). La phase « après perçage » est également stable (dates 6-10). Par contre, la phase « après ajout d'eau » (dates 11-24) semble indiquer une évolution du milieu selon deux régimes distincts.

Après l'ajout d'eau, on observe d'abord une croissance linéaire de la décorrélation en fonction du temps (dates 11-17). Celle-ci pourrait s'expliquer par un processus de diffusion de l'eau. En effet nous verrons au chapitre 5 que la décorrélation est proportionnelle à la section efficace du changement. Si l'eau diffuse dans le béton, la taille linéaire du volume mouillé croît en  $\sqrt{D_{\text{eau}}t}$  avec  $D_{\text{eau}}$  la constante de diffusion de l'eau dans le béton. La section efficace  $\sigma$  croît avec la taille surfacique de la zone affectée par l'eau soit  $\sigma \propto \sqrt{D_{\text{eau}}t}^2 \propto t$ . La dynamique linéaire de la décorrélation pourrait s'expliquer ainsi.

3. On compare l'état  $i$  avec l'état précédent  $i - 1$ .

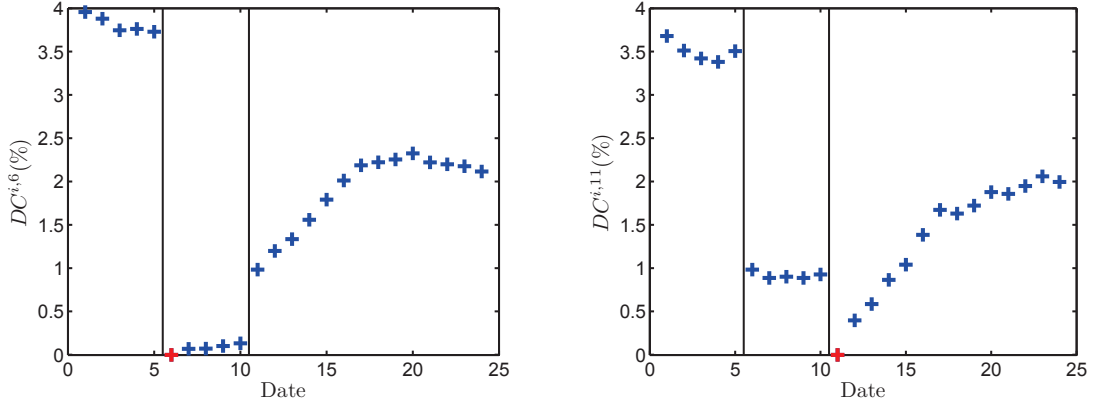


FIGURE 4.3 – Coefficient de décorrélation calculé par rapport à l'état « après perçage » (date 6, à gauche) et par rapport à l'état « après injection d'eau » (date 11, à droite). Les dates de référence (décorrélation nulle) sont marquées en rouge. Le moment du perçage et de l'injection d'eau sont marqués par les deux lignes verticales.

Après la date 17, on note une stabilisation de la décorrélation. On peut supposer que le processus de diffusion ralentit ou que l'évaporation de l'eau prend le dessus sur la diffusion. Après évaporation complète de l'eau, le milieu est censé retrouver l'état « après perçage » (date 6). Une expérience plus longue permettrait de vérifier cette interprétation.

#### La décorrélation par rapport à l'état « après injection d'eau » (date 11) :

Dans la Figure 4.3 (droite), on observe à nouveau la dynamique de diffusion/évaporation de l'eau dans l'éprouvette. On confirme également que l'éprouvette n'a pas encore retrouvé son état « après perçage ». La décorrélation à la fin de l'expérience est largement supérieure au plateau des dates 6 – 10.

**Conclusion :** Pour conclure, cette expérience démontre clairement la sensibilité de la coda à un changement local. Les changements locaux étudiés correspondent à de forts contrastes d'impédance (trou, ajout d'eau). Ces changements de « structure » modifient radicalement les trajets des ondes qui les croisent et engendrent une décorrélation de la coda.

Dans l'expérience suivante, nous essayons de mettre en évidence les dépendances spatiale et temporelle de la décorrélation en fonction de la position du changement et du temps dans la coda.

## 4.3 Expérience 2 : Dépendance spatiale et temporelle de la décorrélation

### 4.3.1 Protocole de l'expérience

Cette expérience est réalisée sur une dalle de béton de 20cm d'épaisseur (garage du laboratoire). Nous collons 20 transducteurs sur sa surface selon la disposition décrite à la Figure 4.4. Durant l'expérience, un trou de 1cm diamètre et 3cm de profondeur est percé au centre du dispositif.

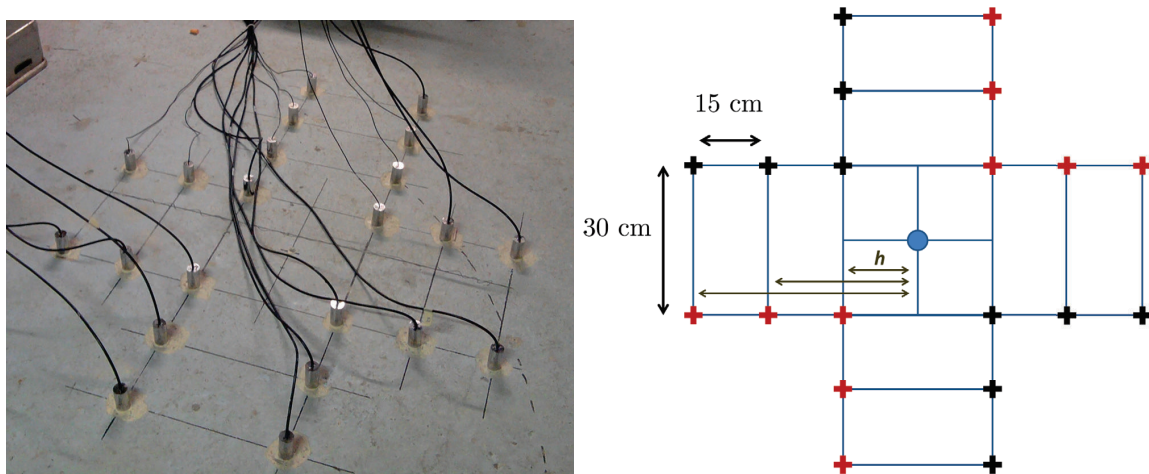


FIGURE 4.4 – À gauche, une photo du dispositif expérimental. À droite, un schéma de la disposition des 10 sources (en rouge), des 10 récepteurs (en noir) et de la position du trou (en bleu, au centre).

Les chirps sont émis entre 100kHz et 500kHz, et chaque acquisition est composée de 500 chirps de 10ms. Nous imposons un rapport cyclique de 0.25, c'est à dire qu'après chaque chirp de 10ms, une pause de 30ms est respectée. L'émission et la réception sont ici synchronisées par la même horloge (baie d'acquisition Lecoeur). La fréquence d'échantillonnage est de 10MHz à l'émission et de 2.5MHz à la réception.

L'expérience consiste à mesurer la décorrélation engendrée par le trou pour trois distances  $h$  différentes sur la médiane de l'axe source-récepteur (Figure 4.5). La configuration complète (Figure 4.4) permet alors par symétrie de moyenner ces mesures sur 4 réalisations différentes du désordre.

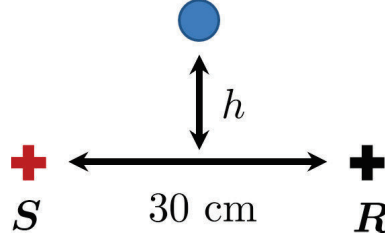


FIGURE 4.5 – Schéma de la configuration élémentaire testée. La hauteur  $h$  du trou sur la médiane de l'axe source-récepteur peut prendre trois valeurs différentes selon le couple de capteurs choisi :  $h = 15, 30$  et  $45\text{cm}$ .

Chaque série d'acquisitions est composée de 12 acquisitions indépendantes qui correspondent aux 12 paires de capteurs en vis à vis (Figure 4.4).

Le bloc est surveillé durant 1h, avec une série d'acquisitions toutes les 20 minutes, soit 4 séries d'acquisitions au total. Le bloc est laissé intact durant toute l'expérience sauf entre les séries d'acquisitions 2 et 3 où le trou est percé.

### 4.3.2 Traitement des données et résultats

**Reconstruction de la réponse impulsionnelle et calcul de l'intensité :** Pour chaque acquisition, la réponse impulsionnelle est reconstruite en inter-corrélant la réponse brute enregistrée par le récepteur avec le signal source théorique. Par cette opération, la réponse est également filtrée dans la bande passante du chirp (100-500kHz). La réponse impulsionnelle associée à la série d'acquisitions de la date  $i$  et au couple de capteurs  $j$  est notée  $\phi_j^i(t)$  ( $i = 1 - 4$  et  $j = 1 - 12$ ). La réponse associée au couple 1 à la date 1 est représentée à la Figure 4.6 (à gauche).

À partir de ces réponses, nous mesurons également l'intensité pour avoir une idée de la constante de diffusion  $D$  ainsi que de l'absorption des ondes dans ce béton. L'intensité  $I$  est calculée dans l'état initial (date 1), par une moyenne glissante du carré de la réponse  $\phi^1$  au cours du temps dans la coda, et en moyennant sur les 12 couples de capteurs indépendants :

$$I(t) = \overline{\langle \phi_j^1(t)^2 \rangle_T} \quad (4.2)$$

où les crochets désignent la moyenne glissante sur une fenêtre de largeur  $T = 250\mu\text{s}$  et où le surlignage désigne la moyenne sur les  $j = 1 - 12$  couples de capteurs indépendants.

L'intensité mesurée (et moyennée) est représentée à la Figure 4.6. On ajuste également l'intensité théorique solution de la diffusion dans une tranche infinie. Les paramètres libres sont la constante de diffusion  $D$  des ondes dans le béton et le temps caractéristique d'absorption  $\tau_{\text{abs}}$ . Le meilleur accord est obtenu pour  $D = 18\text{mm}^2/\mu\text{s}$  et  $\tau_{\text{abs}} = 134\mu\text{s}$ .

Les variations de température ambiante induisent une variation de la vitesse des ondes dans la dalle. Similairement à l'expérience précédente, les signaux sont corrigés

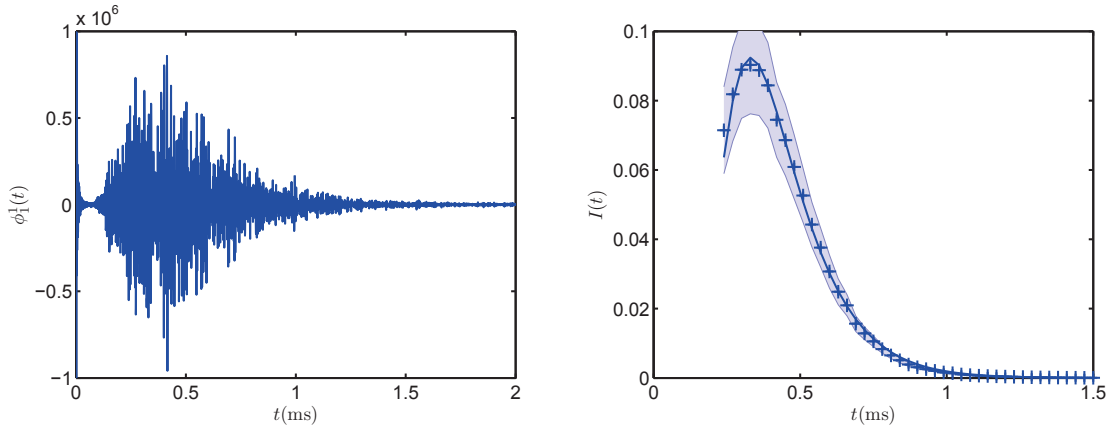


FIGURE 4.6 – À gauche : Réponse impulsionnelle typique (couple 1, date 1). À droite : Intensité mesurée et moyennée sur les 12 couples indépendants (croix) ainsi que la marge d'erreur ( $\pm 1$  écart-type). Les signaux ont préalablement été filtrés dans une bande passante relative de 50% autour de 250kHz. L'intensité théorique solution de la diffusion est représentée en trait plein. Ce meilleur ajustement est trouvé pour  $D = 18\text{mm}^2/\mu\text{s}$  (constante de diffusion) et  $\tau_{\text{abs}} = 134\mu\text{s}$  (temps caractéristique d'absorption).

par la méthode du stretching, la première série d'acquisitions servant de référence. La correction de changement de vitesse relatif est de l'ordre de  $10^{-4}$ .

**La décorrélation de proche en proche :** Pour détecter les changements qui se produisent dans le milieu, on calcule également le coefficient de décorrélation (éq. 4.1) entre les différentes dates d'acquisition, et ce pour chaque couple de capteurs. Cette fois, les décorrélations sont calculées dans une fenêtre glissante de largeur  $T = 150\mu\text{s}$  au cours du temps dans la coda. Pour chacune des trois distances  $h$ , les mesures effectuées sur les 4 couples équivalents sont moyennées.

Comme dans l'expérience précédente, nous calculons d'abord la décorrélation de proche en proche (Figure 4.7, à gauche), pour les trois distances  $h$  différentes. On détecte clairement le perçage pour la plus faible hauteur  $h = 15\text{cm}$ . Le trou est également détecté pour les deux autres distances, avec une décorrélation légèrement supérieure aux fluctuations liées au bruit. Comme espéré, la décorrélation est d'autant plus forte que le changement est proche de l'axe des capteurs.

**La décorrélation au cours du temps :** Nous étudions à présent la décorrélation induite par le trou (comparaison des dates 2 et 3) au cours du temps dans la coda (Figure 4.7, à droite). Pour chacune des distances  $h$ , la décorrélation augmente au cours du temps dans la coda. Les ondes passent plus de temps dans le milieu et sont d'autant plus perturbées par la présence du trou.

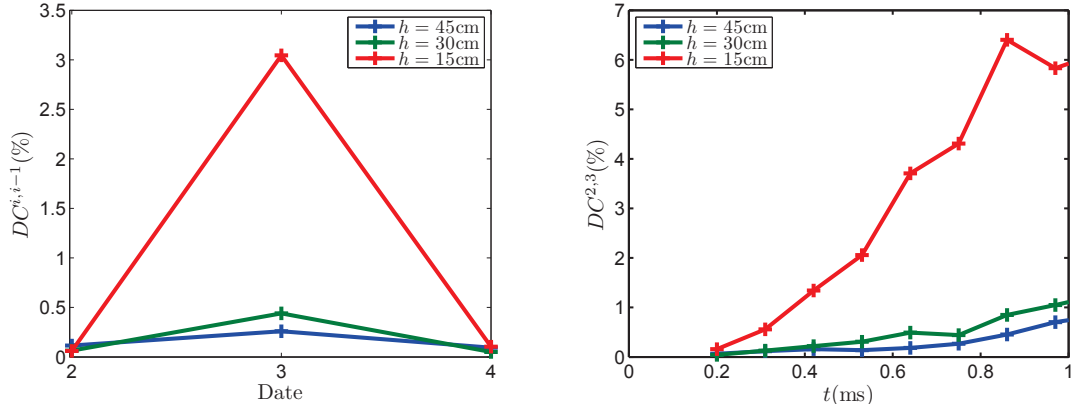


FIGURE 4.7 – À gauche : Coefficient de décorrélation calculé de proche en proche. L'état  $i$  est comparé avec l'état précédent  $i - 1$ . Le maximum de décorrélation correspond bien au moment du perçage et est d'autant plus important que le trou est proche de l'axe des capteurs. À droite : Coefficient de décorrélation calculé au cours du temps dans la coda pour les trois distances  $h$ .

**Conclusion :** Nous avons donc observé que la décorrélation de la coda présente bien une dépendance spatiale (position du changement) et temporelle (temps dans la coda). Ces observations sont à la base des travaux effectués durant la thèse.

Dans le chapitre suivant, nous dérivons une expression théorique de la décorrélation induite par un changement de structure. Nous confrontons également ce modèle à des simulations numériques en différences finies.





# Chapitre 5

## Changement local de structure

En se basant sur le formalisme de la diffusion multiple présenté dans le chapitre 3, nous étudions maintenant de façon théorique l'effet d'un changement local du milieu sur les ondes diffuses. Dans ce chapitre, nous considérons le cas d'un changement de « structure », qui peut correspondre en pratique à l'apparition locale d'un fort contraste d'impédance dans un milieu hétérogène. Nous cherchons alors à prédire la décorrélation intervenant entre les fonctions de Green des états initial et final. Entre ces deux états, le changement local est modélisé par l'ajout d'un diffuseur supplémentaire (défaut) dans le milieu multi-diffusant.

Le résultat obtenu par Ludovic Margerin en 3D et présenté dans Rossetto *et al.* (2011) est démontré ici en détails et étendu au cas bi-dimensionnel. Ce résultat est valable pour un défaut de section efficace suffisamment faible<sup>1</sup>. Nous essayons également d'étendre le calcul à un défaut de section efficace plus importante.

Nous étudions dans un deuxième temps le noyau de sensibilité intervenant dans l'estimation théorique de la décorrélation. Ce noyau, basé sur la solution du transport de l'intensité, sera étudié dans l'approximation de diffusion puis dans l'approximation du transfert radiatif isotrope.

Pour finir, nous présentons une série de simulations numériques pour tester les prédictions théoriques. Nous simulons un milieu homogène rempli de diffuseurs ponctuels à l'aide d'un schéma en différences finies (acoustique 2D). Nous étudions alors la dépendance temporelle de la décorrélation induite par l'apparition d'un défaut en fonction de sa position et de sa taille.

### 5.1 Estimation théorique de la décorrélation

Nous cherchons à présent à prédire l'effet de l'apparition d'un nouveau diffuseur dans le milieu. Soit  $g_1(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)$  la fonction de Green du milieu initial et  $g_2(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)$  celle

---

1. Qualitativement, la taille linéaire de la section efficace du défaut doit être inférieure à la longueur d'onde.

du milieu final pour une source placée en  $\mathbf{s}$  et un récepteur en  $\mathbf{r}$ . Pour quantifier le changement, nous proposons de modéliser la décorrélation des formes d'ondes induite par le nouveau défaut situé en  $\mathbf{r}_0$ . Comme évoqué précédemment, seules les moyennes d'ensemble sont accessibles théoriquement en diffusion multiple. Nous définissons alors la décorrélation  $DC(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t)$  comme :

$$DC(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = 1 - \frac{\overline{g_1(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)g_2^*(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)}}{\sqrt{\overline{g_1(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)g_1^*(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)} \cdot \overline{g_2(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)g_2^*(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)}}} \quad (5.1)$$

où le surlignage dénote la moyenne d'ensemble. Cette fonction est la complémentaire de la corrélation normalisée entre les fonctions de Green initiale et finale. On reconnaît au dénominateur l'expression des intensités du milieu initial et final. On note alors que l'ajout d'un seul diffuseur dans le milieu a une influence négligeable sur l'intensité, et l'on peut écrire plus simplement :

$$DC(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = 1 - \frac{\overline{g_1(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)g_2^*(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)}}{\overline{g(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)g^*(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)}} \quad (5.2)$$

où le dénominateur désigne indifféremment l'intensité dans le milieu initial ou final. Le calcul de ce terme d'intensité a fait l'objet de la section 3.3. Nous rappelons la définition de la fonction  $p$  (éq. 3.69, 3.73 et 3.75), proportionnelle à l'intensité :

$$p(t, \mathbf{s}, \mathbf{r}) = |g(t, \mathbf{s}, \mathbf{r})|^2 = g(t, \mathbf{s}, \mathbf{r})g^*(t, \mathbf{s}, \mathbf{r}) \quad (5.3)$$

$$P(\Omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t, \mathbf{s}, \mathbf{r}) e^{i\Omega t} dt \quad (5.4)$$

$$\overline{P}(\Omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G^+(\omega + \frac{\Omega}{2}, \mathbf{s}, \mathbf{r}) G^-(\omega - \frac{\Omega}{2}, \mathbf{s}, \mathbf{r})} d\omega \quad (5.5)$$

où  $G^+$  et  $G^-$  sont les fonctions de Green causale et acausale de l'équation de Helmholtz dans le milieu hétérogène étudié. Similairement, nous définissons la corrélation  $q$  dans l'espace temporel et fréquentiel :

$$q(t, \mathbf{s}, \mathbf{r}) = g_2(t, \mathbf{s}, \mathbf{r})g_1^*(t, \mathbf{s}, \mathbf{r}) \quad (5.6)$$

$$Q(\Omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(t, \mathbf{s}, \mathbf{r}) e^{i\Omega t} dt \quad (5.7)$$

$$\overline{Q}(\Omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G_2^+(\omega + \frac{\Omega}{2}, \mathbf{s}, \mathbf{r}) G_1^-(\omega - \frac{\Omega}{2}, \mathbf{s}, \mathbf{r})} d\omega \quad (5.8)$$

où  $G_2^+$  et  $G_1^-$  correspondent à la fonction de Green moyenne causale du milieu final et à la fonction de Green moyenne acausale du milieu initial respectivement. Nous rappelons

également que  $\omega$  est une fréquence interne décrivant les variations rapides des fonctions de Green. Les variations lentes de l'enveloppe de l'intensité ou de la corrélation sont décrites par la fréquence externe  $\Omega$ . Les composantes fréquentielles (5.8) et (5.5) sont en effet non négligeables seulement pour  $\Omega \ll \omega$  (3.72).

Pour alléger les notations, considérons que les fonctions de Green  $G_2^+$  et  $G_1^-$  sont implicitement évaluées aux fréquences respectives  $\omega + \frac{\Omega}{2}$  et  $\omega - \frac{\Omega}{2}$ . Pour calculer l'intégrande  $\overline{G_2^+ G_1^-}$  de l'équation (5.8), il est nécessaire de remplacer les fonctions de Green par leurs développements perturbatifs respectifs. Ces développements (3.54) ont été étudiés dans le chapitre 3.

Lors du calcul de l'intensité, nous avons démontré que le produit de ces développements s'écrivait (3.77) :

$$\begin{aligned} \overline{G^+(\mathbf{s}, \mathbf{r}) G^-(\mathbf{s}, \mathbf{r})} = & \overline{G^+(\mathbf{s}, \mathbf{r})} \overline{G^-(\mathbf{s}, \mathbf{r})} \\ & + \iint \overline{G^+(\mathbf{s}, \mathbf{r}_1)} \overline{G^-(\mathbf{s}, \mathbf{r}_1)} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \overline{G^+(\mathbf{r}_2, \mathbf{r})} \overline{G^-(\mathbf{r}_2, \mathbf{r})} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \end{aligned} \quad (5.9)$$

où la fonction  $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  porte le nom de facteur de structure et prend en compte toutes les séquences de diffusions possibles entre les points  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ . L'application de la moyenne d'ensemble dans le cadre de l'ISA imposait que les seuls termes subsistant dans  $\Gamma$  étaient composés de séquences de diffusions communes<sup>2</sup> pour les fonctions de Green causale et acausale  $G^+$  et  $G^-$ .

Ici, contrairement au cas du calcul de l'intensité, les deux milieux ne sont pas identiques mais différent d'un seul diffuseur. En multipliant les développements de  $G_2^+$  et  $G_1^-$  et en appliquant la moyenne d'ensemble, on s'attend à voir apparaître une grande majorité de termes communs à l'intensité. Cependant, des termes supplémentaires liés à la présence du défaut seront présents. On peut toujours formellement écrire, similairement à l'écriture intégrale de l'intensité (5.9) :

$$\begin{aligned} \overline{G_2^+(\mathbf{s}, \mathbf{r}) G_1^-(\mathbf{s}, \mathbf{r})} = & \overline{G_2^+(\mathbf{s}, \mathbf{r})} \overline{G_1^-(\mathbf{s}, \mathbf{r})} \\ & + \iint \overline{G_2^+(\mathbf{s}, \mathbf{r}_1)} \overline{G_1^-(\mathbf{s}, \mathbf{r}_1)} \Gamma^{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \overline{G_2^+(\mathbf{r}_2, \mathbf{r})} \overline{G_1^-(\mathbf{r}_2, \mathbf{r})} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

où  $\Gamma^{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  est un facteur de structure qui prend en compte l'effet du nouveau défaut. Dans le cas général, ce facteur  $\Gamma^{12}$  n'est pas accessible analytiquement. Nous supposons par la suite que le défaut est suffisamment localisé pour être considéré comme ponctuel et nous séparons le cas d'un défaut de faible section efficace du cas d'un défaut de forte section efficace.

---

2. Voir le schéma du bas de la Figure 5.1.

### 5.1.1 Défaut de faible section efficace

En considérant que la section efficace du nouveau défaut est suffisamment faible, on peut négliger les interactions récurrentes avec celui-ci<sup>3</sup>, et développer le facteur  $\Gamma^{12}$  comme :

$$\begin{aligned} \Gamma^{12}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &+ \int \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \bar{G}^+(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mathbf{t}_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \bar{G}^+(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \bar{G}^-(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) \Gamma(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}') d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \end{aligned} \quad (5.11)$$

où l'on a supposé que le défaut est suffisamment éloigné des points  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$  et où  $\mathbf{t}_0$  désigne sa matrice  $\mathbf{T}$ . Ce développement est inspiré du travail de Nieuwenhuizen et van Rossum (1993). Le défaut étant considéré ponctuel et situé en  $\mathbf{r}_0$ , sa matrice  $\mathbf{T}$  s'écrit :

$$\mathbf{t}_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \mathbf{t}_0 \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_0) \quad (5.12)$$

L'équation (5.11) se simplifie alors pour donner :

$$\Gamma^{12}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \iint \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \bar{G}^+(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \mathbf{t}_0 \bar{G}^+(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2) \bar{G}^-(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (5.13)$$

Pour plus de clarté, cette équation est représentée schématiquement à la Figure 5.1. Le facteur  $\Gamma^{12}$  est composé de  $\Gamma$ , le facteur de structure décrivant l'intensité, c'est à dire la corrélation des fonctions de Green dans un milieu inchangé, et d'un terme d'interférence décrivant l'effet du nouveau défaut. C'est ce terme d'interférence que nous cherchons à évaluer.

En se plaçant à nouveau dans l'approximation du régime diffusif, les faibles variations spatiales de l'intensité nous permettent de sortir  $\Gamma$  de l'intégrale et d'obtenir :

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \mathbf{t}_0 \Gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}') \iint \bar{G}^+(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \bar{G}^+(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2) \bar{G}^-(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \\ &= \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \mathbf{t}_0 \Gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}') I_{21} \end{aligned} \quad (5.14)$$

où l'intégrale restante correspond à l'intégrale de boucle  $I_{21}$ . Cette intégrale est calculée en annexe (éq. A.11, A.19) et dépend de la dimension de l'espace. En insérant maintenant l'expression de  $\Gamma_{12}$  (5.14) dans le terme de corrélation (5.10), on trouve :

$$\overline{G_2^+(\mathbf{s}, \mathbf{r}) G_1^-(\mathbf{s}, \mathbf{r})} = \iint \bar{G}_2^+(\mathbf{s}, \mathbf{r}_1) \bar{G}_1^-(\mathbf{s}, \mathbf{r}_1) \Gamma_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \bar{G}_2^+(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}) \bar{G}_1^-(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2$$

---

3. Cette approximation ne correspond pas à l'approximation de Born, pour laquelle la matrice  $\mathbf{T}$  du défaut serait remplacée par son potentiel  $\mathbf{V}$ . Le défaut correspond bien à un fort contraste d'impédance, mais de section efficace limitée (typiquement  $\sigma < \lambda$ ).

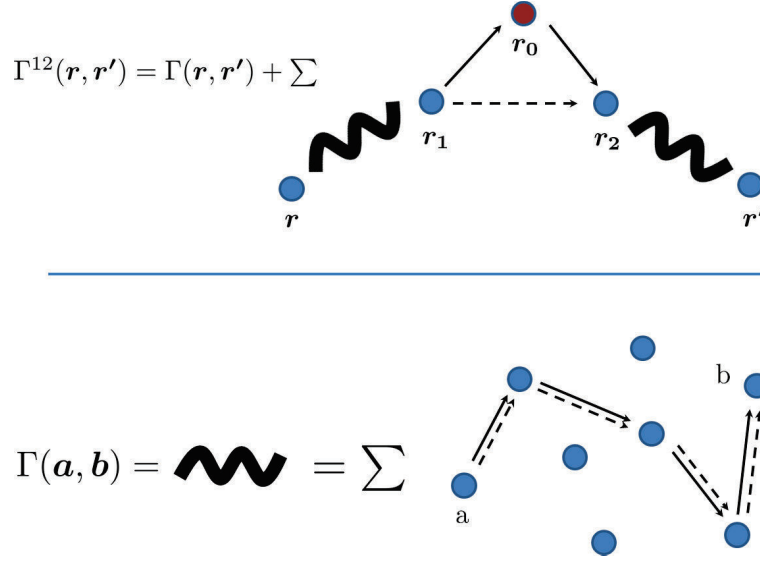


FIGURE 5.1 – Représentation schématique des facteurs  $\Gamma_{12}$  et  $\Gamma$ . En bas, le facteur de structure  $\Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  s'interprète comme la somme de toutes les séquences de diffusions communes entre les diffuseurs situés en  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ .  $\bar{G}^+$  est représenté en traits forts et  $\bar{G}^-$  en tirets. En haut, le terme  $\Gamma_{12}$  s'exprime en première approximation comme la somme de  $\Gamma$  et d'un terme d'interférence simple avec le nouveau défaut (en rouge).

$$\begin{aligned}
 &= \int \bar{G}_2^+(\mathbf{s}, \mathbf{r}_1) \bar{G}_1^-(\mathbf{s}, \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \Gamma_{12}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) \int \bar{G}_2^+(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}) \bar{G}_1^-(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}) d\mathbf{r}_2 \\
 &= I_{11}^2 \Gamma(\mathbf{s}, \mathbf{r}) + I_{11}^2 I_{21} \mathbf{t}_0 \Gamma(\mathbf{s}, \mathbf{r}_0) \Gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

en appliquant à nouveau l'hypothèse de variation lente pour  $\Gamma_{12}$  et en identifiant les intégrales de boucles  $I_{11}$  (équ. A.9 et A.15). Pour rester consistant avec l'approximation du régime diffusif adoptée précédemment, nous négligeons la contribution de l'intensité cohérente transportée de  $\mathbf{s}$  à  $\mathbf{r}$ .

Pour terminer le calcul, il convient de repasser dans le domaine temporel en intégrant les termes de corrélation (5.8) et d'intensité (5.5) sur la fréquence interne  $\omega$ , et en faisant une transformée de fourier inverse sur la fréquence externe  $\Omega$ . En considérant que les signaux sont filtrés dans une bande de fréquence étroite  $\delta\omega$  autour de la fréquence centrale  $\omega_c$ , on peut simplifier l'intégrale (5.5) en :

$$\begin{aligned}
 \bar{P}(\Omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}) &= \frac{\delta\omega}{2\pi} \overline{G^+(\omega_c + \frac{\Omega}{2}, \mathbf{s}, \mathbf{r}) G^-(\omega_c - \frac{\Omega}{2}, \mathbf{s}, \mathbf{r})} \\
 &= \frac{\delta\omega}{2\pi} (I_{11})^2 \Gamma(\omega_c, \Omega, \mathbf{s}, \mathbf{r})
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

en appliquant l'approximation des variations faibles de  $\Gamma$  à l'équation (5.9) et en identifiant les intégrales de boucles  $I_{11}$  (A.15). Puis, en se rappelant que seules les contributions telles que  $\Omega \ll \omega_c$  sont non-négligeables, on peut approximer :

$$\mathbf{t}_0(\omega + \frac{\Omega}{2}) \approx \mathbf{t}_0(\omega_c) \quad (5.17)$$

$$\Gamma(\omega, \Omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}) \approx \Gamma(\omega_c, \Omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}) \quad (5.18)$$

en explicitant à nouveau les dépendances fréquentielles de  $\Gamma$  et  $\mathbf{t}_0$ . On peut alors simplifier l'intégrale de la corrélation (5.8) en :

$$\begin{aligned} \bar{Q}(\Omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}) &\approx \frac{\delta\omega}{2\pi} (I_{11})^2 \Gamma(\Omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}) + \frac{\delta\omega}{2\pi} \frac{(\mathbf{t}_0 - \mathbf{t}_0^*)}{2} (I_{11})^2 I_{21} \Gamma(\Omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}_0) \Gamma(\Omega, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}) \\ &= \frac{\delta\omega}{2\pi} (I_{11})^2 [\Gamma(\Omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}) + i\Im(\mathbf{t}_0) I_{21} \Gamma(\Omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}_0) \Gamma(\Omega, \mathbf{r}_0, \mathbf{r})] \end{aligned} \quad (5.19)$$

en utilisant la symétrie (3.32) de la matrice  $\mathbf{T}$  du défaut. On note que le signe du terme  $\mathbf{t}_0 - \mathbf{t}_0^*$  vient de la dépendance en  $\omega$  de l'intégrale de boucle  $I_{21}$  (A.19).

La décorrélation (5.2), quantité recherchée, s'écrit comme le rapport des transformées inverse sur  $\Omega$  des quantités (5.19) et (5.16) :

$$\begin{aligned} DC(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) &= 1 - \frac{TF_{\Omega}^{-1} [\Gamma(\Omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}) + i\Im(\mathbf{t}_0) I_{21} \Gamma(\Omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}_0) \Gamma(\Omega, \mathbf{r}_0, \mathbf{r})]}{TF_{\Omega}^{-1} [\Gamma(\Omega, \mathbf{s}, \mathbf{r})]} \\ &= -i\Im(\mathbf{t}_0) I_{21} \frac{TF_{\Omega}^{-1} [\Gamma(\Omega, \mathbf{s}, \mathbf{r}_0) \Gamma(\Omega, \mathbf{r}_0, \mathbf{r})]}{TF_{\Omega}^{-1} [\Gamma(\Omega, \mathbf{s}, \mathbf{r})]} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Le théorème optique (3.46) nous donne  $\Im(\mathbf{t}_0) = -\sigma k_0$  avec  $k_0$  le nombre d'onde central des signaux. On utilise alors la relation (3.85) entre le facteur de structure  $\Gamma$  et l'intensité diffusive  $I_{\Omega}$ , définie dans la section 3.3. La décorrélation s'exprime alors comme :

$$DC(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = \frac{iI_{21}\sigma k_0 c}{I_{11}\ell} \frac{TF_{\Omega}^{-1} [I_{\Omega}(\mathbf{s}, \mathbf{r}_0) I_{\Omega}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})]}{TF_{\Omega}^{-1} [I_{\Omega}(\mathbf{s}, \mathbf{r})]} \quad (5.21)$$

Il reste à remplacer les valeurs des intégrales de boucles  $I_{11}$  et  $I_{21}$ . Or à 2D comme à 3D, on trouve que leur ratio vaut :

$$\frac{I_{21}}{I_{11}} = -\frac{i\ell}{2k_0} \quad (5.22)$$

Le préfacteur se simplifie en  $c\sigma/2$ . On applique enfin la transformée de Fourier inverse au numérateur et au dénominateur pour obtenir :

$$DC(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = \frac{c\sigma}{2} \frac{\int_0^t I(\mathbf{s}, \mathbf{r}_0, u) I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t - u) du}{I(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)} \quad (5.23)$$

où  $I(t)$  désigne l'intensité diffusive dans le domaine temporel. La convolution temporelle vient de la transformée inverse du produit en fréquence<sup>4</sup>.

La décorrélation  $DC$  est donc linéairement proportionnelle à la section efficace du défaut  $\sigma$ <sup>5</sup> et à la vitesse des ondes  $c$ . Elle dépend également du temps  $t$  dans la coda et de la position  $\mathbf{r}_0$  du défaut à travers le noyau de sensibilité  $K$  :

$$\begin{aligned} DC(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) &= \frac{c\sigma}{2} K(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t), \\ K(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) &= \frac{\int_0^t I(\mathbf{s}, \mathbf{r}_0, u) I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t - u) du}{I(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Ce noyau sera étudié en détail à la section 5.2 de ce chapitre. Pour dériver cette relation, valable à 2D comme à 3D, nous avons supposé que la section efficace du défaut était suffisamment faible pour négliger les interactions récurrentes avec celui-ci dans le facteur de structure  $\Gamma_{12}$ . Dans la section suivante, nous proposons d'étendre ce calcul à un défaut de section efficace plus importante.

### 5.1.2 Défaut de section efficace importante

En considérant un défaut de section efficace importante, calculons le nouveau facteur de structure  $\Gamma'_{12}$  impliquant deux interactions avec la matrice  $\mathbf{T}$  du défaut. En développant l'expression (5.13) à l'ordre suivant, on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma'_{12}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \Gamma_{12}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \overline{G}^+(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \mathbf{t}_0 \overline{G}^+(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2) \overline{G}^-(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ &\quad \times \Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \overline{G}^+(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_0) \mathbf{t}_0 \overline{G}^+(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_4) \overline{G}^-(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \Gamma(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}') d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \\ &= \Gamma_{12}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \mathbf{t}_0 \Gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0) \mathbf{t}_0 \Gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}') (I_{21})^2 \end{aligned} \quad (5.25)$$

On observe que le terme  $\Gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0)$  décrit une séquence de diffusion « en boucle », c'est à dire un retour sur le défaut par un processus diffusif. Ce nouveau terme est représenté schématiquement à la Figure 5.2.

Pour simplifier la suite du calcul, faisons l'hypothèse d'un diffuseur résonant. Cette hypothèse est raisonnable si la taille du défaut est de l'ordre de la longueur d'onde. Cette

4. L'intensité étant nulle aux temps négatifs, les bornes de l'intégrale peuvent être restreinte de 0 à  $t$ .

5. Pour un défaut absorbant,  $\sigma$  correspond à la section efficace totale ou section efficace d'extinction.



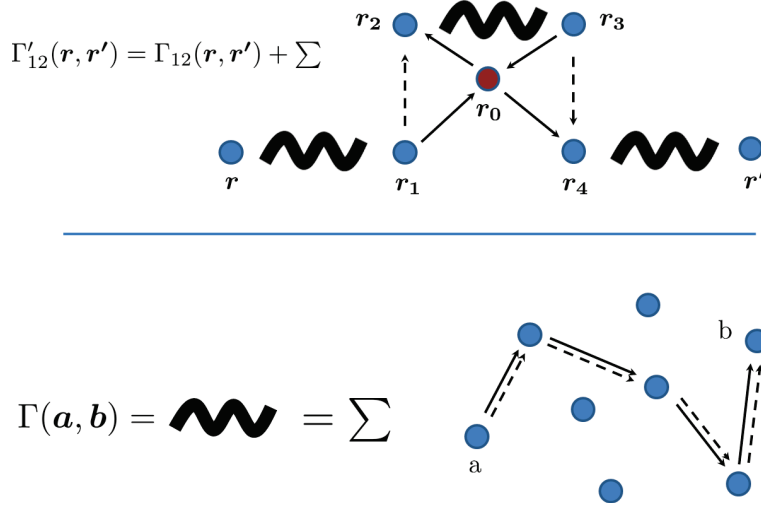


FIGURE 5.2 – Représentation schématique des facteurs  $\Gamma'_{12}$  et  $\Gamma$ . En bas, le facteur de structure  $\Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  s'interprète comme la somme de toutes les séquences de diffusions communes entre les diffuseurs situés en  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ .  $\overline{\mathbf{G}}^+$  est représenté en traits forts et  $\overline{\mathbf{G}}^-$  en tirets. En haut, le terme  $\Gamma'_{12}$  s'exprime comme la somme de  $\Gamma_{12}$  et d'un terme de double interférence avec le nouveau défaut (en rouge).

approximation implique que la partie réelle de la matrice  $\mathbf{T}$  du diffuseur est nulle, c'est à dire  $\mathbf{t}_0 = i\Im \mathbf{t}_0$ . En suivant les étapes (5.15) à (5.23), on trouve :

$$DC(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = \frac{c\sigma}{2} \frac{\int_0^t I(\mathbf{s}, \mathbf{r}_0, u) I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t - u) du}{I(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)} - \left(\frac{c\sigma}{2}\right)^2 \frac{\int_0^t \int_0^t I(\mathbf{s}, \mathbf{r}_0, u) I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, v) I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t - (u + v)) dudv}{I(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)} \quad (5.26)$$

La décorrélation s'exprime alors avec une correction en  $\sigma^2$  et une version étendue du noyau qui comprend un terme de diffusion du défaut vers lui-même. De même, on peut étendre la correction pour  $n$  visites du défaut et obtenir<sup>6</sup> :

$$DC(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = \frac{c\sigma}{2} \frac{\int_0^t I(\mathbf{s}, \mathbf{r}_0, u) I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t - u) du}{I(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)} - \left(\frac{c\sigma}{2}\right)^2 \frac{\int_0^t \int_0^t I(\mathbf{s}, \mathbf{r}_0, u) I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, v) I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t - (u + v)) dudv}{I(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)} - \dots - \frac{\left(\frac{c\sigma}{2}\right)^n}{I(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)} \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t I(\mathbf{s}, \mathbf{r}_0, u_1) \Pi_{i=2}^n [I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, u_i)]$$

6. Certaines contributions (diagrammes « croisés ») ont peut-être été ommises dans le calcul. Les résultats de cette section sont à prendre avec précaution.

$$\times I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t - \sum_{i=1}^n u_n) du_1 du_2 \dots du_n \quad (5.27)$$

Le signe de la correction dépend du nombre  $n$  de visites récurrentes du défaut considérées. Cette propriété n'est pas intuitive. On pourrait en effet penser que l'intensité de la décorrélation devrait grandir avec le nombre de visites récurrentes considérées. Cette propriété reste à interpréter.

## 5.2 Noyau de sensibilité

Le noyau de sensibilité associé à un défaut de faible section efficace a été obtenu dans le cadre du régime diffusif. En remplaçant l'intensité par la solution de l'équation de diffusion, ce noyau s'exprime de façon analytique en dimension deux et trois. Nous présentons ces résultats, dérivés par Vincent Rossetto, et dont le cas 3D est explicité dans Rossetto *et al.* (2011). Nous supposons ensuite la validité du noyau pour le régime plus général du transfert radiatif isotrope. En utilisant les solutions décrites par Paasschens (1997), nous montrons que le noyau obtenu est composé de plusieurs termes, dont nous analysons la signification physique.

### 5.2.1 Noyau en diffusion

Nous rappelons l'expression de la solution de l'équation de diffusion dans le domaine temporel<sup>7</sup> :

$$I_d^{\text{Diff}}(r, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4Dt}} \quad (5.28)$$

Cette solution est valable pour un milieu infini en dimension  $d$ . Le milieu étant invariant par translation, la solution ne dépend que de la distance  $r$  de transport et du temps  $t$ . Le noyau  $K$  obtenu pour un défaut de faible section efficace s'écrit (5.24) :

$$K(a, b, R, t) = \frac{\int_0^t I_d^{\text{Diff}}(a, u) I_d^{\text{Diff}}(b, t - u) du}{I_d^{\text{Diff}}(R, t)} \quad (5.29)$$

où l'invariance par translation nous permet d'exprimer le noyau en fonction du temps  $t$  d'observation et de trois distances (voir Figure 5.3) :

- $a$  la distance entre la source et le défaut
- $b$  la distance entre le défaut et le récepteur
- $R$  la distance entre la source et le récepteur

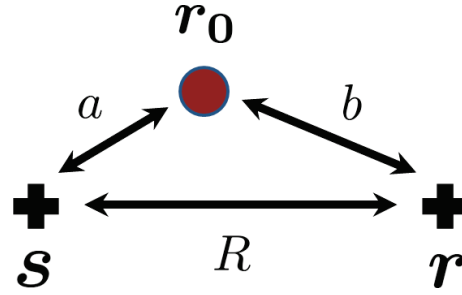


FIGURE 5.3 – Représentation schématique des distances  $a$ ,  $b$ , et  $R$  intervenant dans l'expression du noyau en milieu infini. La source et le récepteur sont repérés par des croix et le nouveau défaut par un disque rouge.

Le noyau dépend donc de la dimension de l'espace  $d$  et la difficulté de son calcul réside dans la convolution présente au numérateur. Notons  $n_d(a, b, t)$  le numérateur du noyau  $K$  en dimension  $d$  :

$$n_d(a, b, t) = \int_0^t I_d^{\text{Diff}}(a, u) I_d^{\text{Diff}}(b, t - u) du \quad (5.30)$$

Définissons  $TL$  l'opérateur transformée de Laplace :

$$F(p) = TL[f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \quad (5.31)$$

où  $F(p)$  est la transformée de Laplace de  $f(t)$ ,  $p$  étant la variable conjuguée du temps. La transformée de Laplace d'une convolution étant égale au produit des transformées, on peut écrire la transformée du numérateur du noyau comme :

$$N_d(a, b, p) = TL[n_d(a, b, t)] = TL[I_d^{\text{Diff}}(a, t)] TL[I_d^{\text{Diff}}(b, t)] \quad (5.32)$$

**Cas 3D :** En trois dimensions, la transformée de Laplace de la solution de la diffusion s'écrit (Abramowitz et Stegun, 1965, [29.3.82]) :

$$TL[I_{3D}^{\text{Diff}}(r, t)] = \frac{1}{4\pi Dr} e^{-r\sqrt{\frac{p}{D}}} \quad (5.33)$$

Le numérateur  $N_{3D}(a, b, p)$  se calcule par le produit (5.32) :

---

7. Le terme décrivant l'absorption éventuelle du milieu est omis. En effet, si l'absorption est spatialement uniforme, celle-ci se simplifie dans le noyau (5.29) et n'intervient donc pas dans l'estimation de la décorrélation. Le cas d'une absorption non-uniforme n'est pas traité dans ce manuscrit.

$$N_{3D}(a, b, p) = \frac{1}{(4\pi D)^2 ab} e^{-(a+b)\sqrt{\frac{p}{D}}} \quad (5.34)$$

et la transformée inverse nous donne par identification :

$$n_{3D}(a, b, t) = \frac{a+b}{4\pi D ab} \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(a+b)^2}{4Dt}} \quad (5.35)$$

Le noyau s'écrit enfin en normalisant  $n_{3D}$  par l'intensité totale :

$$K_{3D}(a, b, R, t) = \frac{a+b}{4\pi D ab} e^{-\frac{R^2 - (a+b)^2}{4Dt}} \quad (5.36)$$

Remarque : Dans le cas où la source et le récepteur sont coïncidents, on obtient :

$$K_{3D}^{co}(a, t) = \frac{1}{2\pi D a} e^{-\frac{a^2}{Dt}} \quad (5.37)$$

en utilisant  $a = b$  et  $R = 0$ . Ce cas particulier est dérivé dans Pacheco et Snieder (2005).

**Cas 2D :** En deux dimensions, le numérateur  $n_{2D}$  du noyau s'écrit :

$$n_{2D}(a, b, t) = \frac{1}{(4\pi D)^2} \int_0^t \frac{e^{-\frac{a^2}{4Du}} e^{-\frac{b^2}{4D(t-u)}}}{u(t-u)} du \quad (5.38)$$

En effectuant le changement de variable  $x = \frac{t-u}{u}$ , on trouve :

$$n_{2D}(a, b, t) = \frac{1}{(4\pi D)^2 t} e^{-\frac{(a^2+b^2)}{4Dt}} \int_0^\infty \frac{1}{x} e^{-\frac{b^2}{4Dtx}} e^{-\frac{a^2}{4Dt}x} dx \quad (5.39)$$

L'intégrale obtenue peut être vue comme une transformée de Laplace sur la variable  $x$ , où la variable conjuguée vaut  $\frac{a^2}{4Dt}$ . Cette forme est connue (Abramowitz et Stegun, 1965, [29.3.120]) et le résultat est analytique, ce qui donne :

$$n_{2D}(a, b, t) = \frac{1}{(4\pi D)^2 t} e^{-\frac{a^2+b^2}{4Dt}} 2K_0\left(\frac{ab}{2Dt}\right) \quad (5.40)$$

où  $K_0$  dénote la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce, d'ordre 0. Finalement, on obtient l'expression du noyau à 2D en normalisant  $n_{2D}$  par l'intensité totale :

$$K_{2D}(a, b, R, t) = \frac{1}{2\pi D} e^{\frac{R^2 - (a^2 + b^2)}{4Dt}} K_0\left(\frac{ab}{2Dt}\right) \quad (5.41)$$

Remarque : Pour le cas de la source et du récepteur coïncidents, on obtient :

$$K_{2D}^{co}(a, b, R, t) = \frac{1}{2\pi D} e^{\frac{-a^2}{2Dt}} K_0\left(\frac{a^2}{2Dt}\right) \quad (5.42)$$

Ce cas est également mentionné dans Pacheco et Snieder (2005).

Pour représenter ces noyaux (Figure 5.4), nous fixons la distance  $R$  (source-récepteur) à 5 libre parcours moyens  $\ell$ . Nous fixons également le temps d'observation à  $t = 10\tau$ ,  $\tau = \ell/c$  étant le temps libre moyen. À 3D, le plan d'observation est décalé d'une distance  $z = \ell/4$  de l'axe des capteurs pour une meilleure visualisation.

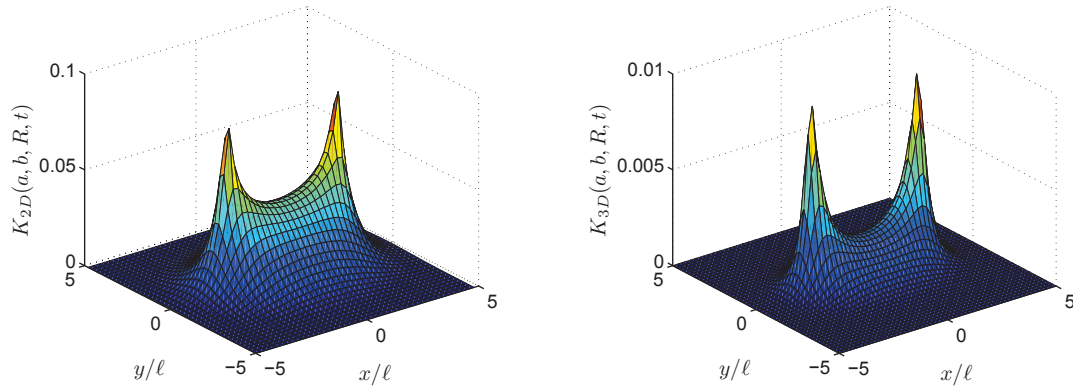


FIGURE 5.4 – Noyau issu de la diffusion en 2D (à gauche) et 3D (à droite) en fonction de la position du défaut  $(x, y)$ . La distance entre capteurs est fixée à  $R = 5\ell$  et le temps d'observation à  $t = 10\tau$ , avec  $\tau = \ell/c$  le temps libre moyen. Les distances  $a$  et  $b$  séparant le défaut de la source et du récepteur dépendent implicitement de  $x$  et  $y$ . À 3D, pour une meilleure visualisation, les capteurs sont situés à une distance de  $z = \ell/4$  du plan d'observation.

Nous observons que la sensibilité est maximale au niveau de la position des capteurs ainsi que sur l'axe source-récepteur. La sensibilité décroît de façon abrupte avec la distance aux capteurs. De façon prévisible, cette décroissance est plus marquée en 3D.

### 5.2.2 Noyau en transfert radiatif

Supposons que l'expression du noyau reste valide dans le cadre plus général du transfert radiatif. Dans ce régime, le propagateur de l'intensité  $I^{\text{TR}}$  peut s'écrire comme la

somme de l'intensité cohérente  $I^c$  et de l'intensité incohérente  $I^i$  (voir section 3.4.2), soit :

$$I^{\text{TR}} = I^c + I^i \quad (5.43)$$

Dans le cas de diffuseurs isotropes en milieu infini 2D, on rappelle l'expression de ces termes (3.93) :

$$I_{2D}^c(r, t) = \frac{e^{-\frac{r}{\ell}}}{2\pi r c} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (5.44)$$

$$I_{2D}^i(r, t) = \frac{1}{4\pi D t} \left(1 - \frac{r^2}{c^2 t^2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{\ell}(\sqrt{c^2 t^2 - r^2} - ct)} \Theta(ct - r) \quad (5.45)$$

où le libre parcours moyen de diffusion  $\ell$  est égal au libre parcours moyen de transport  $\ell^*$ . L'invariance par translation implique là encore que l'intensité ne dépend que de la distance  $r$  de transport et du temps  $t$  d'observation. La constante de diffusion vaut  $D = c\ell/2$  avec  $c$  la vitesse des ondes. La fonction de Heaviside  $\Theta$  assure la causalité du transport.

La convolution du numérateur du noyau peut alors se décomposer en 4 termes :

$$\begin{aligned} K(a, b, R, t) &= \frac{n(a, b, t)}{I^{\text{TR}}(R, t)}, \\ n(a, b, t) &= \int_0^t I^c(a, u) I^c(b, t - u) du \quad (N^{cc}) \\ &\quad + \int_0^t I^c(a, u) I^i(b, t - u) du \quad (N^{ci}) \\ &\quad + \int_0^t I^i(a, u) I^c(b, t - u) du \quad (N^{ic}) \\ &\quad + \int_0^t I^i(a, u) I^i(b, t - u) du \quad (N^{ii}) \end{aligned} \quad (5.46)$$

Le premier terme  $N^{cc}$  est issu de la convolution de l'onde cohérente se propageant de la source au défaut et de l'onde cohérente se propageant du défaut au récepteur. Ce terme n'est non-nul que pour le temps  $t = \frac{a+b}{c}$  correspondant au trajet source-défaut-récepteur effectué balistiquement. Nous négligeons ce terme, en supposant les capteurs suffisamment éloignés l'un de l'autre, ou en regardant à des temps ultérieurs.

Le second terme  $N^{ci}$  et le troisième terme  $N^{ic}$  sont des termes croisés, qui correspondent respectivement à une propagation cohérente de la source au défaut puis à une

propagation diffuse du défaut au récepteur, et à une propagation diffuse de la source au défaut et cohérente du défaut au récepteur. Ces termes deviennent non négligeables si le défaut se trouve proche de la source ou du récepteur respectivement. Dans le cas où les capteurs sont éloignés l'un de l'autre, seul l'un des deux termes à la fois est susceptible d'intervenir pour une position de défaut donnée.

Le quatrième et dernier terme  $N^{ii}$  correspond à une propagation diffuse de la source au défaut et diffuse également du défaut au récepteur. Nous verrons que ce terme converge vers le noyau issu de la solution de la diffusion.

Dans le cas où le défaut serait proche d'un des deux capteurs, le transfert radiatif nous permet de prendre en compte le supplément de décorrélation induit par l'interaction de l'onde cohérente avec le défaut.

Pour un défaut situé loin des capteurs, la différence avec le noyau issu de la diffusion n'intervient qu'aux temps courts, pour lesquels le transfert radiatif respecte la causalité liée au temps de transport.

Nous illustrons dans la suite ces propriétés pour le cas 2D isotrope. En utilisant les expressions des intensités cohérentes et incohérentes  $I_{2D}^c$  et  $I_{2D}^i$  (éq. 5.44, 5.45), les termes croisés  $N_{2D}^{ci}$  et  $N_{2D}^{ic}$  s'écrivent de façon exacte :

$$\begin{aligned} N_{2D}^{ci}(a, b, t) &= \frac{e^{-\frac{a}{\ell}}}{2\pi ac} I^i(b, t - \frac{a}{c}) \\ &= \frac{e^{-\frac{a}{\ell}}}{2\pi ac} \frac{1}{4\pi D(t - \frac{a}{c})} \left(1 - \frac{b^2}{(ct - a)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{\ell}(\sqrt{(ct-a)^2 - b^2} - ct + a)} \Theta(ct - a - b) \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} N_{2D}^{ic}(a, b, t) &= \frac{e^{-\frac{b}{\ell}}}{2\pi bc} I^i(a, t - \frac{b}{c}) \\ &= \frac{e^{-\frac{b}{\ell}}}{2\pi bc} \frac{1}{4\pi D(t - \frac{b}{c})} \left(1 - \frac{a^2}{(ct - b)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{\ell}(\sqrt{(ct-b)^2 - a^2} - ct + b)} \Theta(ct - a - b) \end{aligned} \quad (5.48)$$

en remarquant que le produit de convolution se simplifie grâce à l'expression en « dirac » de l'intensité cohérente. Le terme  $N_{2D}^{ii}$  est quant à lui calculé de façon numérique.

Après calcul, le noyau issu du transfert radiatif obtenu en 2D et 3D est représenté dans la Figure 5.5. Pour illustrer les différences par rapport au noyau issu de la solution de la diffusion, nous superposons des représentations en coupe des noyaux (Figures 5.6 et 5.7).

La forme des noyaux en transfert radiatif est similaire à celle des noyaux en régime de diffusion. Cependant, on peut noter une différence importante de sensibilité proche de la source et du récepteur. Cette différence paraît importante dans une zone de rayon  $\approx \ell$  autour de chaque capteur. Le surplus de décorrélation est majoritairement dû aux

termes croisés (5.47) ou (5.48) qui décrivent l'interaction de l'onde cohérente avec le défaut. La taille de cette zone correspond à la distance typique  $\ell$  de décroissance de l'onde cohérente.

Il reste à étudier la dynamique de la décorrélation au cours du temps dans la coda, pour différentes positions de défauts. Cette étude sera menée dans la section suivante et confrontée à des mesures de décorrélations issues de simulations numériques.

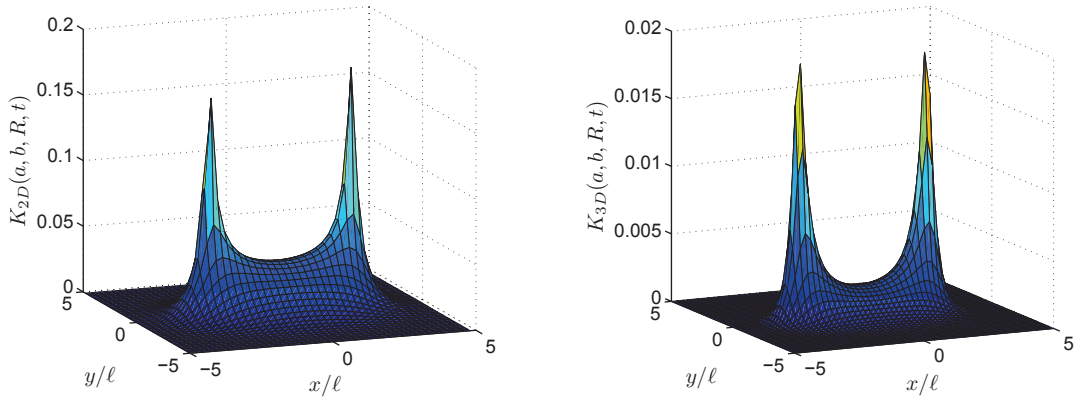


FIGURE 5.5 – Noyau issu de la solution du transfert radiatif à 2D (à gauche) et 3D (à droite), en fonction de la position du défaut  $(x, y)$ . La distance entre capteurs est fixée à  $R = 5\ell$  et le temps d'observation à  $t = 10\tau$ , avec  $\tau = \ell/c$  le temps libre moyen. Les distances  $a$  et  $b$  séparant le défaut de la source et du récepteur dépendent implicitement de  $x$  et  $y$ . À 3D, pour une meilleure visualisation, les capteurs sont situés à une distance de  $z = \ell/4$  du plan d'observation.



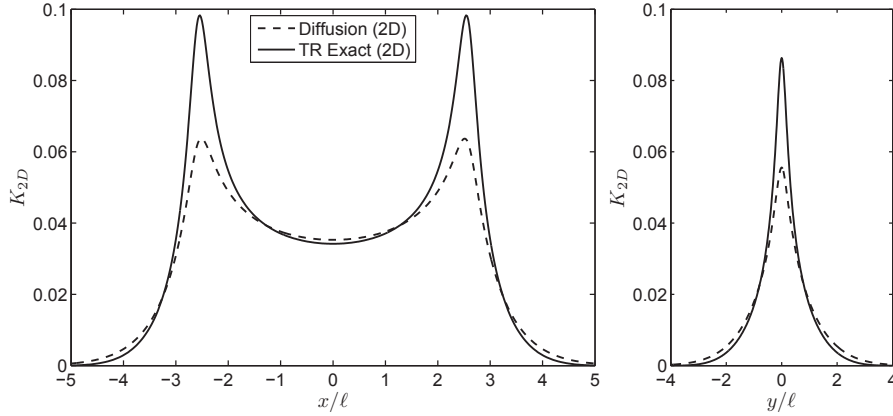


FIGURE 5.6 – Comparaison des noyaux 2D issus de la diffusion (tirets) et du transfert radiatif (traits forts). La distance entre capteurs est fixée à  $R = 5\ell$  et le temps d'observation à  $t = 10\tau$ , avec  $\tau = \ell/c$  le temps libre moyen. La Figure de gauche représente la dépendance spatiale du noyau pour des défauts situés sur un axe parallèle à l'axe des capteurs ( $y = \ell/5$ ). La Figure de droite représente la dépendance du noyau pour des défauts situés sur un axe perpendiculaire à l'axe des capteurs ( $x = 2.7\ell$ ). On note que les différences entre les deux noyaux résident principalement dans un cercle de rayon  $\ell$  autour des capteurs.

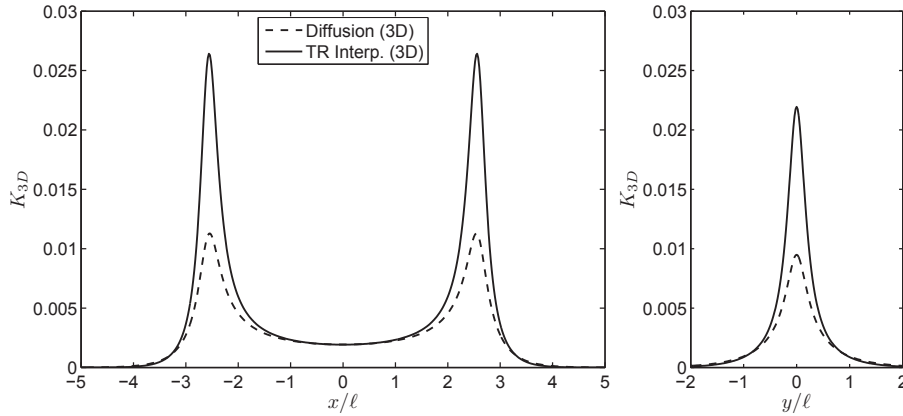


FIGURE 5.7 – Comparaison des noyaux à 3D issus de la diffusion (tirets) et du transfert radiatif (traits forts). La distance entre capteurs est fixée à  $R = 5\ell$  et le temps d'observation à  $t = 10\tau$ , avec  $\tau = \ell/c$  le temps libre moyen. La Figure de gauche représente la dépendance spatiale du noyau pour des défauts situés sur un axe parallèle à l'axe des capteurs ( $y = \ell/5, z = 0$ ). La Figure de droite représente la dépendance du noyau pour des défauts situés sur un axe perpendiculaire à l'axe des capteurs ( $x = 2.7\ell, z = 0$ ). On note que les différences entre les deux noyaux résident principalement dans un cercle de rayon  $\ell$  autour des capteurs.

## 5.3 Simulations numériques

### 5.3.1 Protocole des simulations

Nous simulons la propagation d'ondes acoustiques dans un milieu 2D multi-diffusant. Le milieu est constitué d'une matrice de vitesse uniforme dans laquelle un grand nombre de diffuseurs mous sont ajoutés. Nous choisissons de résoudre l'équation d'onde pour la pression (3.1) en différences finies, à l'aide d'un schéma d'ordre 2 explicite en temps (2,2 FDTD) :

Soit  $\delta r$  le pas spatial de la grille et  $\delta t$  le pas temporel. La pression en  $x = \alpha\delta r$ ,  $y = \beta\delta r$  et au temps  $t = n\delta t$  est notée  $P_{\alpha,\beta}^n$ . Les versions discrétisées de la dérivée temporelle seconde et du Laplacien s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} &\simeq \frac{1}{\delta t^2} (P_{\alpha,\beta}^{n+1} + P_{\alpha,\beta}^{n-1} - 2P_{\alpha,\beta}^n) \\ \Delta P &\simeq \frac{1}{\delta r^2} (P_{\alpha+1,\beta}^n + P_{\alpha-1,\beta}^n + P_{\alpha,\beta+1}^n + P_{\alpha,\beta-1}^n - 4P_{\alpha,\beta}^n)\end{aligned}\quad (5.49)$$

et l'algorithme d'évolution se déduit de l'équation d'onde (3.1) :

$$P_{\alpha,\beta}^{n+1} = \frac{c^2 \delta t^2}{\delta r^2} (P_{\alpha+1,\beta}^n + P_{\alpha-1,\beta}^n + P_{\alpha,\beta+1}^n + P_{\alpha,\beta-1}^n - 4P_{\alpha,\beta}^n) - P_{\alpha,\beta}^{n-1} + 2P_{\alpha,\beta}^n \quad (5.50)$$

avec  $c$  la vitesse des ondes. Ce schéma permet d'exprimer le champ de pression au temps  $n+1$  en fonction sa valeur au temps  $n$  et  $n-1$ .

Les diffuseurs mous sont décrits localement par une condition de pression nulle. Les bords du milieu sont soumis à cette même condition et se comportent donc comme des « surfaces libres ». La source est une impulsion gaussienne de fréquence centrale 2Mhz et de bande passante 30% (Figure 5.8).

La vitesse est fixée à  $c = 1.5\text{mm}.\mu\text{s}^{-1}$  (vitesse du son dans l'eau). La longueur d'onde centrale vaut donc  $\lambda_c = 0.75\text{mm}$ . Le pas de la grille est de  $\delta r = 0.05\text{mm}$  soit 15 points par longueur d'onde. Le pas temporel de la grille est fixé par la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy (Courant *et al.*, 1967) à  $\delta t = \frac{\delta r}{c\sqrt{2}} = 0.0236\mu\text{s}$ . Le milieu simulé ici est un carré de  $150\text{mm} \times 150\text{mm}$  ( $200\lambda_c \times 200\lambda_c$ ).

Nous travaillons dans le régime de diffusion multiple en milieu dilué, défini par l'inégalité  $\lambda \ll \ell^* \ll L_{\text{Milieu}}$ . Nous rappelons également que la taille négligeable des diffuseurs implique que  $\ell = \ell^*$  (la diffusion est isotrope). Nous choisissons alors d'imposer la valeur du libre parcours moyen de transport à  $\ell^* = 10\lambda_c$  soit  $\ell^* = 7.5\text{mm}$ . Pour cela, nous remplissons le milieu de volume  $V_{\text{Milieu}}$  de diffuseurs ponctuels mous positionnés aléatoirement. Le nombre  $N$  de diffuseurs à placer est déterminé par la relation suivante (éq. 3.68) :

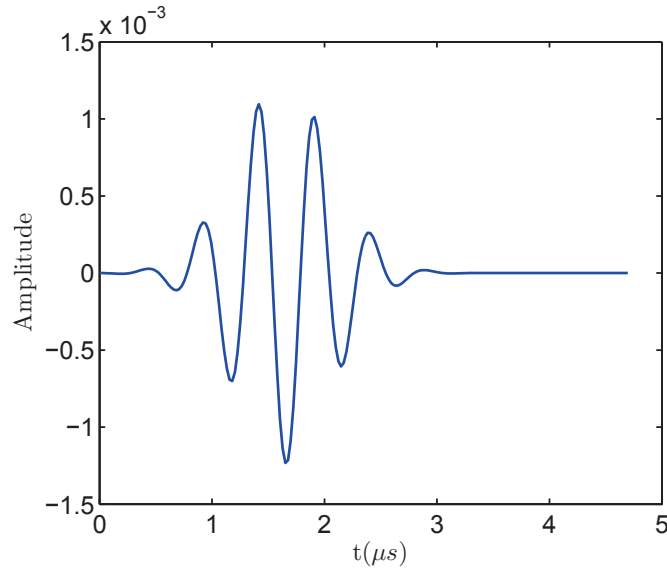


FIGURE 5.8 – Le signal source est une impulsion gaussienne de fréquence centrale 2MHz et de bande passante 30%

$$\ell^* = \ell = \frac{1}{n\sigma} \quad (5.51)$$

soit

$$N = \frac{V}{\ell^*\sigma} \quad (5.52)$$

avec  $n = \frac{N}{V}$  la densité volumique de diffuseurs et  $\sigma$  la section efficace d'un diffuseur ponctuel. La section efficace d'un diffuseur ponctuel est évaluée par une simulation en milieu homogène dans lequel une onde plane est envoyée sur ce diffuseur unique et le champ diffusé enregistré par un réseau de capteurs placé autour de celui-ci. Cette simulation est détaillée dans la section suivante.

Dans notre cas, la simulation en milieu homogène nous permet de calculer  $\sigma = 0.13\text{mm} (\approx \lambda/5)$ . Après application de la formule (5.52), nous obtenons  $N = 23000$  diffuseurs ponctuels à placer dans le milieu. Un exemple d'une réalisation quelconque du désordre est présenté à la Figure 5.9. La réponse impulsionnelle correspondant à cette configuration est représentée à la Figure 5.10.

### 5.3.2 Sections efficaces de diffuseurs mous

Nous détaillons ici la procédure de calcul de la section efficace des diffuseurs composant le milieu (ponctuels) mais aussi de diffuseurs circulaires de différentes tailles. La section efficace différentielle  $\sigma_\theta(\theta)$  d'un diffuseur correspond à la valeur de la puissance diffusée par unité angulaire pour une onde incidente plane d'intensité unité.

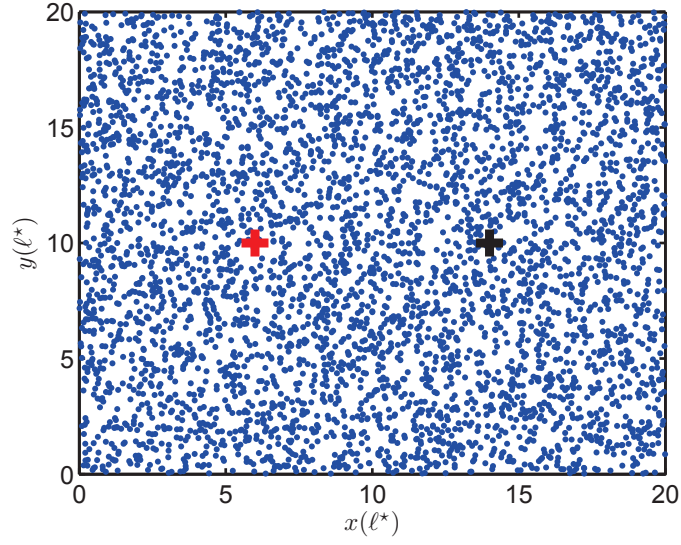


FIGURE 5.9 – Une réalisation quelconque du désordre. Pour une meilleure visualisation, seul un cinquième des diffuseurs sont représentés. Leur taille est volontairement augmentée.

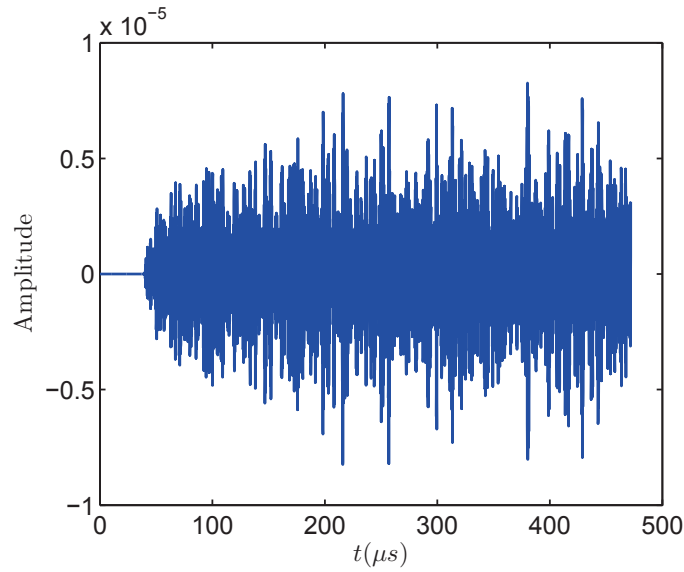


FIGURE 5.10 – Réponse impulsionnelle typique pour une distance de  $8\ell^*$  entre capteurs. La coda est générée par les milliers de diffuseurs ponctuels présents dans le milieu. Les bords étant réfléchissants et l'absorption étant nulle, l'enveloppe de la coda tend vers une valeur constante.

Pour évaluer cette grandeur, on place le diffuseur au centre du milieu uniforme et d'un cercle de récepteurs de rayon  $R_c \gg \lambda$  (ici  $R_c = 25\lambda$ ). On effectue alors une simulation d'onde plane incidente selon l'angle  $\theta = 0$ . Soit  $\phi_j^T(t)$  (resp.  $\phi_j^0(t)$ ) le champ enregistré par le capteur situé à l'angle  $\theta_j$  en présence du diffuseur (resp. sans le diffuseur). L'intensité

diffusée s'écrit :

$$I_j^{\text{diff}} = \int (\phi_j^T(t) - \phi_j^0(t))^2 dt \quad (5.53)$$

et la section efficace différentielle :

$$\sigma_\theta(\theta_j) = I_j^{\text{diff}} R_c \quad (5.54)$$

l'expression étant valable pour une onde incidente d'intensité totale unité. On rappelle que la section efficace totale  $\sigma$  est obtenue en intégrant  $\sigma_\theta$  sur toutes les directions :

$$\sigma = \int_0^{2\pi} \sigma_\theta(\theta) d\theta \quad (2D) \quad (5.55)$$

La section efficace de transport  $\sigma^*$  correspond à la puissance diffusée hors de la direction incidente. On la calcule comme :

$$\sigma^* = \int_0^{2\pi} \sigma_\theta(\theta) (1 - \cos \theta) d\theta \quad (2D) \quad (5.56)$$

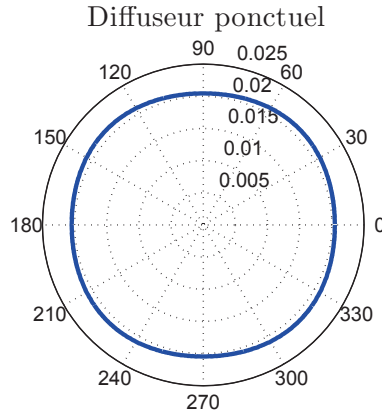


FIGURE 5.11 – Section efficace différentielle d'un défaut ponctuel (un point de grille). La diffusion est isotrope.

Dans le cas d'un défaut ponctuel, la diffusion est isotrope (Figure 5.11) et on a  $\sigma = \sigma^*$ . Les résultats sont également présentés pour des défauts circulaires de différents rayons  $r_s$  ( $\lambda/5$  à  $2\lambda$ ) à la Figure 5.12. Les valeurs des sections efficaces de diffusion et de transport sont rassemblées dans le Tableau 5.1.

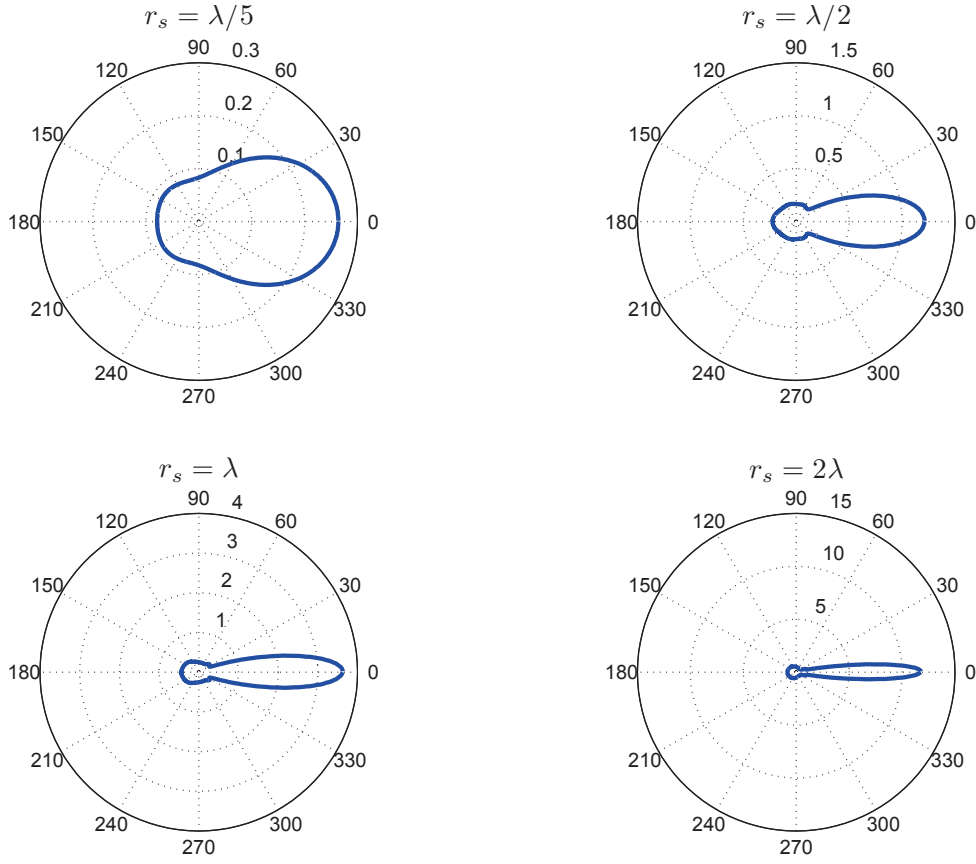


FIGURE 5.12 – Sections efficaces différentielles de différents défauts circulaires de rayon  $r_s$ . Plus le défaut est gros, plus la diffusion est piquée vers l'avant.

TABLE 5.1 – Mesures de sections efficaces de diffusion et de transport pour des diffuseurs circulaires mous de différentes tailles. La longueur d'onde centrale vaut  $\lambda_c = 0.75\text{mm}$ .

rayon $r_s$	ponctuel	$\frac{\lambda_c}{5}$	$\frac{\lambda_c}{2}$	$\lambda_c$	$2\lambda_c$
$\sigma(\text{mm})$	0.13	0.80	1.87	3.37	6.47
$\sigma^*(\text{mm})$	0.13	0.55	1.20	2.19	4.23

### 5.3.3 Étude de l'intensité, l'enveloppe de la coda

Afin de valider le protocole des simulations en milieu hétérogène, nous comparons à présent l'intensité mesurée dans les simulations (enveloppe de la coda) avec les solutions théoriques issues de l'approximation de la diffusion ou du transfert radiatif isotrope. Nous rappelons ces expressions à 2D en milieu infini (section 3.4) :

TABLE 5.2 – Distances source-récepteur utilisées pour la mesure de l'intensité.

Capteur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Distance $R$ ( $\ell^*$ )	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2	3	4	5	6	7	8

**Diffusion :** À 2D, l'intensité solution de l'équation de diffusion en milieu infini s'écrit :

$$I_{2D}^{\text{Diff}}(r, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)} e^{-\frac{r^2}{4Dt}} \quad (5.57)$$

avec  $r$  la distance entre la source et le récepteur et  $D = c\ell^*/2$  la constante de diffusion du milieu. Cette solution a pour avantage de s'implémenter facilement et de donner une solution analytique au noyau (5.41).

**Transfert radiatif :** À 2D, l'intensité solution de l'équation du transfert radiatif isotrope en milieu infini s'écrit (Shang et Gao, 1988; Paasschens, 1997) :

$$I_{2D}^{TR}(r, t) = \frac{e^{-ct/\ell}}{2\pi r} \delta(ct - r) + \frac{1}{2\pi\ell ct} \left(1 - \frac{r^2}{c^2 t^2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{[\ell^{-1}(\sqrt{c^2 t^2 - r^2} - ct)]} \Theta(ct - r) \quad (5.58)$$

On retrouve la solution de la diffusion pour  $t \gg r/c$  avec  $D = c\ell/2$ .

Dans les simulations présentées, les bords du domaine étant réfléchissants, il est nécessaire de prendre en compte les contributions de l'énergie réfléchiée par les parois. On applique pour cela la méthode dite des images, qui consiste à superposer différentes solutions du milieu infini. Ces solutions sont associées à la position réelle de la source ainsi qu'aux positions de ses images miroirs (sources virtuelles), qui sont obtenues par symétrie axiale selon les bords du domaine<sup>8</sup>.

**Mesure :** Compte tenu des fortes fluctuations spatio-temporelles de l'intensité sur une réalisation particulière du désordre, nous moyennons les mesures sur 50 milieux indépendants. Des capteurs sont placés à 12 positions différentes (Figure 5.13) de manière à couvrir les distances de transport listées dans le Tableau 5.2.

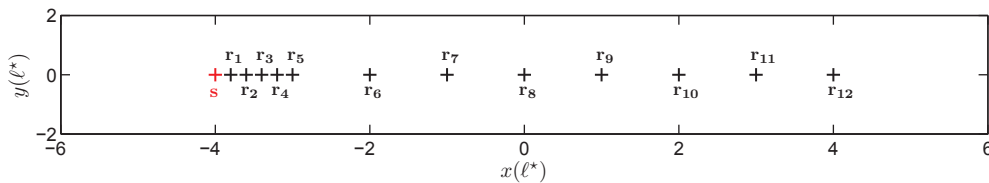


FIGURE 5.13 – Position de la source (en rouge) et des 12 récepteurs (en noir) utilisées pour la mesure de l'intensité.

8. Pour plus de détails, on pourra consulter par exemple l'ouvrage de Crank (1979).

Soit  $\phi(t)$  l'amplitude d'une réponse impulsionnelle quelconque. L'intensité  $I(t)$  est calculée par une moyenne glissante du carré du champ d'onde. La fenêtre de moyennage est fixée à  $T = 10\mu s$  (20 périodes). On a donc  $I(t) = \langle \phi(\tau)^2 \rangle_{\tau \in [t-\frac{T}{2}, t+\frac{T}{2}]}$ . Une moyenne d'ensemble est ensuite effectuée sur les 50 réalisations du désordre. On obtient finalement 12 mesures différentes de l'intensité  $I_\alpha(t) = \langle \phi_\alpha^2 \rangle_T$ , une pour chaque capteur  $\alpha = 1 - 12$ .

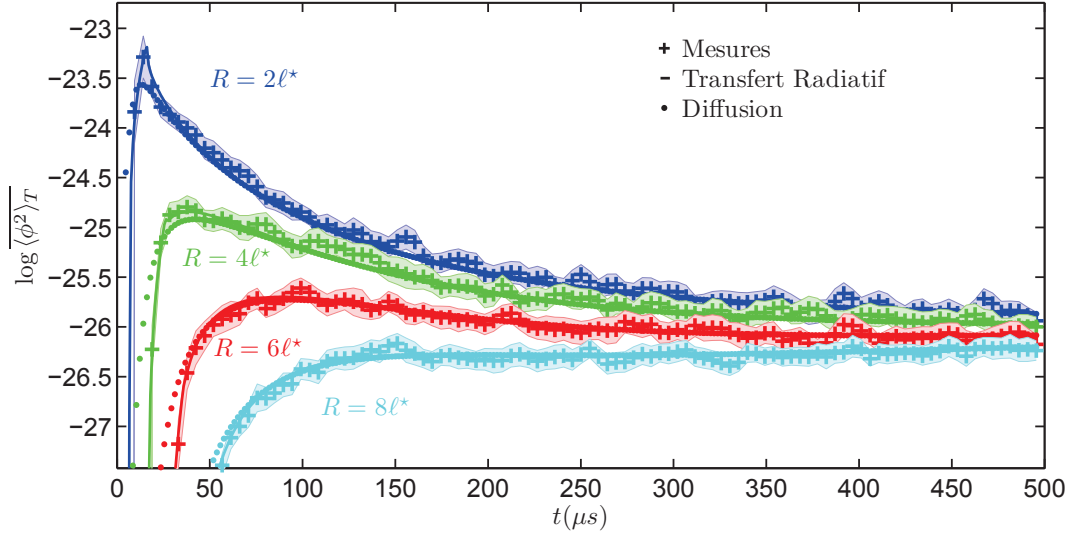


FIGURE 5.14 – Intensité mesurée aux capteurs 6, 8, 10 et 12 (croix) moyennée sur le désordre et sur une fenêtre temporelle glissante. Les solutions du transfert radiatif sont représentées en trait fort et les solutions de la diffusion en pointillés. On peut noter l'imprécision de la solution de la diffusion aux temps courts.

**Résultats :** Les courbes théoriques sont obtenues par convolution des solutions du transport avec le signal source (Figure 5.8) et sont directement superposées aux mesures des simulations. Dans la Figure 5.14, les deux solutions analytiques sont équivalentes aux temps longs et décrivent bien l'enveloppe des simulations. On note que la solution de la diffusion est inexacte aux temps courts. Elle ne respecte pas la causalité liée au temps de transport et décrit une arrivée immédiate de l'énergie.

Dans la Figure 5.15, seule la moyenne sur le désordre est appliquée aux mesures et un zoom est effectué sur les premières arrivées. La moyenne glissante temporelle n'est pas appliquée pour permettre d'observer la part de l'intensité liée à l'onde cohérente. On multiplie également l'intensité par la distance  $R$  pour corriger l'atténuation géométrique. On note que la solution du transfert radiatif décrit bien la décroissance de cette contribution cohérente.



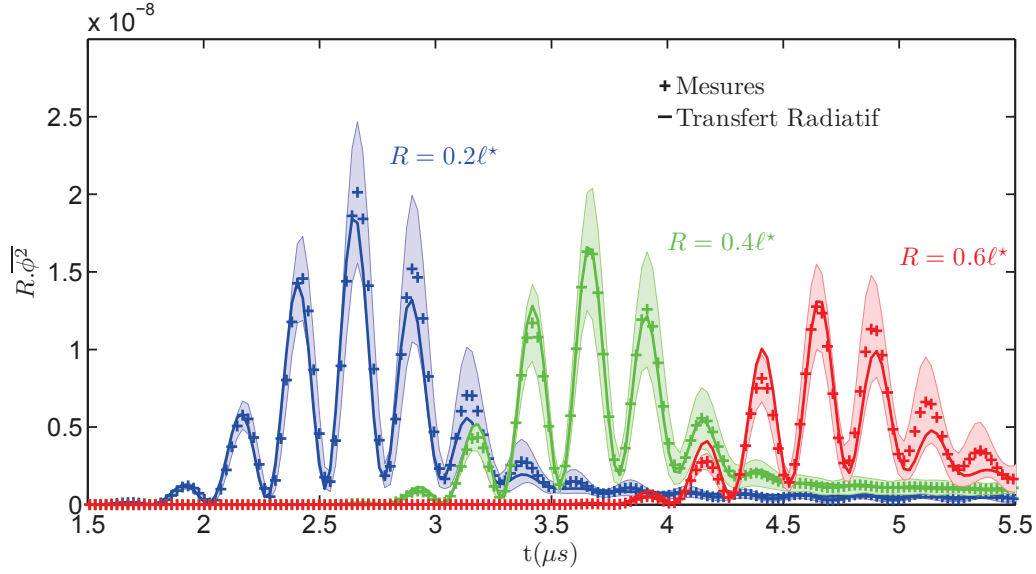


FIGURE 5.15 – Intensité des premières arrivées mesurées aux capteurs 1, 2 et 3 (croix) moyennées seulement sur le désordre. Les solutions du transfert radiatif sont représentées en trait fort. On observe ici la contribution de l’onde cohérente à l’intensité totale. L’atténuation géométrique est corrigée en multipliant l’intensité par la distance  $R$ , la décroissance observée est donc seulement liée aux diffuseurs.

### 5.3.4 Étude de la décorrélation

Nous avons vérifié dans la section précédente que l’enveloppe des signaux simulés s’accorde bien avec l’intensité théorique construite à partir des solutions du transport en milieu infini et de leurs images « miroir ». Nous avons également calculé à la section 5.3.2 la section efficace de différents défauts circulaires en milieu homogène.

À l’aide de ces deux outils, nous pouvons maintenant calculer la décorrélation théorique engendrée par l’apparition d’un nouveau défaut dans le milieu hétérogène simulé. Nous comparons ensuite ces prédictions théoriques avec la décorrélation mesurée sur les signaux simulés, dans différentes configurations.

#### Théorie :

Nous rappelons l’expression théorique de la décorrélation induite par l’apparition d’un défaut de faible section efficace  $\sigma$  en  $\mathbf{r}_0$  (5.23) :

$$DC(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = \frac{c\sigma}{2} K(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) \quad (5.59)$$

avec :

$$K(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = \frac{\int_0^t I(\mathbf{s}, \mathbf{r}_0, u) I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t - u) du}{I(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)} \quad (5.60)$$

où  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{r}$  sont les positions de la source et du récepteur,  $\mathbf{r}_0$  la position du nouveau défaut et  $t$  le temps dans la coda auquel la décorrélation est évaluée. La vitesse de propagation des ondes dans le milieu vaut  $c$  et  $\sigma$  représente la section efficace du nouveau défaut.  $I(\mathbf{a}, \mathbf{b}, t)$  est le propagateur de l'intensité de  $\mathbf{a}$  vers  $\mathbf{b}$ .

### Mesure :

Nous choisissons de fixer la distance source-récepteur à  $R = 8\ell^*$  pour l'ensemble des simulations. Cela revient à utiliser seulement le capteur 12 (Figure 5.13).

Chaque expérience comprend deux acquisitions de réponses impulsionnelles, répétées sur 50 réalisations du désordre. La première acquisition est effectuée dans le milieu hétérogène initial (la référence) et les réponses sont notées  $\phi_1(t)$ . La deuxième acquisition est effectuée dans le milieu final, comportant un diffuseur supplémentaire et les réponses sont notées  $\phi_2(t)$ .

Les mesures de décorrélation  $DC^{\text{exp}}(t)$  sont effectuées entre les réponses  $\phi_1(t)$  et  $\phi_2(t)$ , dans une fenêtre de largeur  $T = 10\mu s$  (20 périodes) glissante au cours du temps dans la coda :

$$DC^{\text{exp}}(t) = 1 - \frac{\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \phi_1(\tau)\phi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \phi_1(\tau)^2d\tau \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \phi_2(\tau)^2d\tau}} \quad (5.61)$$

Nous étudions dans un premier temps l'influence de la position du diffuseur par rapport aux capteurs puis dans un deuxième temps, l'influence de sa taille, sur la décorrélation.

### Position du diffuseur

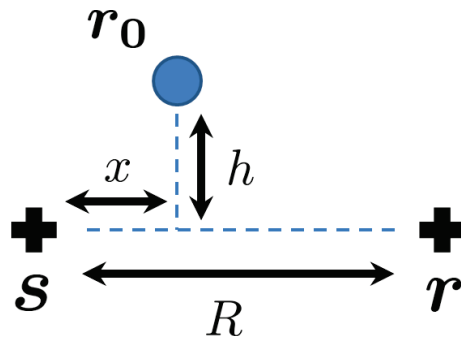


FIGURE 5.16 – Représentation schématique de la position des capteurs et du nouveau défaut.

**Champ lointain :** Dans cette expérience, nous choisissons de placer le défaut loin de la source et du récepteur en fixant  $x = 4\ell^*$  (Fig. 5.16). Nous étudions alors l'influence de

la distance  $h$  séparant le défaut de l'axe des capteurs sur la décorrélation. Nous rappelons que la distance source-récepteur est fixée à  $R = 8\ell^*$ .

Le nouveau diffuseur est le même que ceux constituant le milieu, c'est à dire un diffuseur ponctuel mou de section efficace  $\sigma = 0.13\text{mm}$  ( $\approx \lambda/5$ ).

Différentes hauteurs sont étudiées, de  $h = 0$  à  $h = 8\ell^*$ . Les décorrélations mesurées au cours du temps dans la coda (puis moyennées sur le désordre) sont représentées par des croix dans la Figure 5.17.

**Champ proche :** Dans cette seconde expérience, pour étudier la décorrélation induite par un défaut en « champ proche » de la source, nous imposons  $x = \ell^*/4$  puis  $x = \ell^*/2$ . Nous positionnons le défaut sur l'axe des capteurs ( $h = 0$ ), tout en gardant  $R = 8\ell^*$ . La décorrélation mesurée au cours du temps dans la coda (puis moyennée sur le désordre) est représentée par des croix dans la Figure 5.18.

### Taille du diffuseur

Dans cette dernière expérience, nous fixons entièrement la position du défaut tel que  $R = 8\ell^*$ ,  $x = 4\ell^*$  et  $h = 4\ell^*$ . Nous étudions alors l'influence de la taille du défaut en faisant varier son rayon  $r_s$  de  $\frac{\lambda}{5}$  à  $2\lambda$ . Les défauts utilisés correspondent aux diffuseurs dont la section efficace a été évaluée dans la section 5.3.2 (Tableau 5.1). Les décorrélations mesurées au cours du temps dans la coda puis moyennées sur le désordre sont représentées par des croix dans la Figure 5.19.

### Discussion

Deux noyaux théoriques sont calculés numériquement, le premier est construit à partir de la solution de l'équation de diffusion et le deuxième à partir de la solution exacte du transfert radiatif isotrope<sup>9</sup>. Les décorrélations théoriques sont alors calculées en utilisant les valeurs des sections efficaces du Tableau 5.1 et sont directement superposées aux mesures.

Dans le cas du défaut ponctuel en champ lointain (Fig. 5.17), la décorrélation est bien décrite par les deux modèles, qui convergent rapidement l'un vers l'autre. On peut cependant noter l'imprécision aux temps courts de l'approximation de la diffusion, qui surestime la valeur de la décorrélation. Cette surestimation est due à l'instantanéité du transport de l'énergie dans cette approximation.

Pour le diffuseur en champ proche (Fig. 5.18), l'approximation de la diffusion est fautive quel que soit le temps dans la coda. Cette erreur systématique est due à l'omission de l'onde cohérente qui se propage de la source vers le nouveau défaut. En effet, situé à moins d'un libre parcours moyen de la source, une part non-négligeable de la décorrélation

---

9. Dans les deux cas, la solution comprend également les termes issus des sources virtuelles pour prendre en compte l'effet des bords réfléchissants.

vient de l'interaction de l'onde cohérente avec le défaut. Cette contribution est bien décrite par le noyau issu de la solution du transfert radiatif.

Pour la troisième expérience (Fig. 5.19), la décorrélation théorique issue du transfert radiatif semble bien décrire les observations pour le plus petit diffuseur  $r_s = \lambda/5$ . Pour les autres défauts, plus le rayon augmente, plus la décorrélation théorique est surestimée. Pour des diffuseurs de section efficace importante (qualitativement  $\sigma > \lambda$ ), l'expression (5.59) qui néglige les visites récurrentes du défaut n'est plus valable. Nous utilisons alors l'expression du noyau corrigé pour 3 visites du défaut, dérivé dans la section 5.1.2. Cette correction semble rectifier le désaccord observé pour les plus gros défauts, tout en restant valable pour les défauts de petite taille. Comme évoqué à la section 5.1.2, le signe de la correction reste à interpréter.

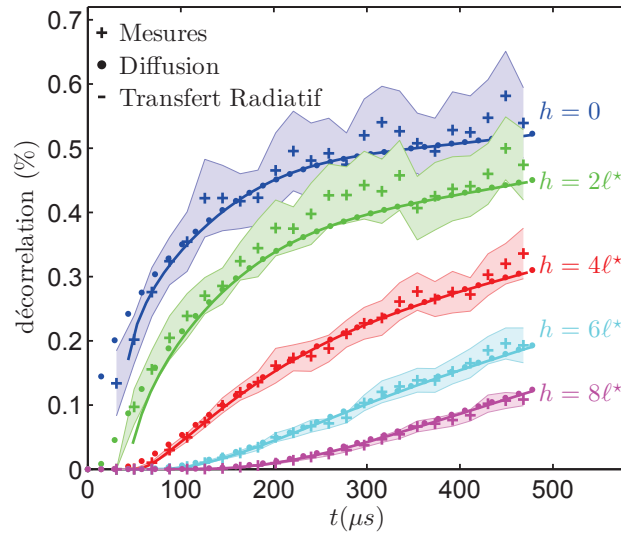


FIGURE 5.17 – Décorrélation générée par un défaut ponctuel en champ lointain :  $x = 4\ell^*$  et  $h = 0, 2, 4, 6, 8\ell^*$ . Nous superposons la décorrélation issue du noyau de la diffusion (pointillés), la décorrélation issue du noyau du transfert radiatif (traits forts) et les mesures issues des simulations (croix). Les deux solutions théoriques convergent rapidement l'une vers l'autre et sont en accord avec les mesures.

Ces simulations ont été effectuées en milieu carré à bords réfléchissants. Les solutions de l'intensité ont pu être calculées à l'aide des solutions théoriques en milieu infini et de leurs images « miroir ». Dans la section suivante, une méthode est proposée pour étendre le calcul de l'intensité à des géométries plus générales.

### 5.3.5 Milieux quelconques et matrices de transfert

La formulation analytique de la solution de la diffusion se limite à des géométries simples. Nous proposons dans ce paragraphe une méthode rapide de calcul numérique de la solution de la diffusion pour des configurations un peu plus générales.

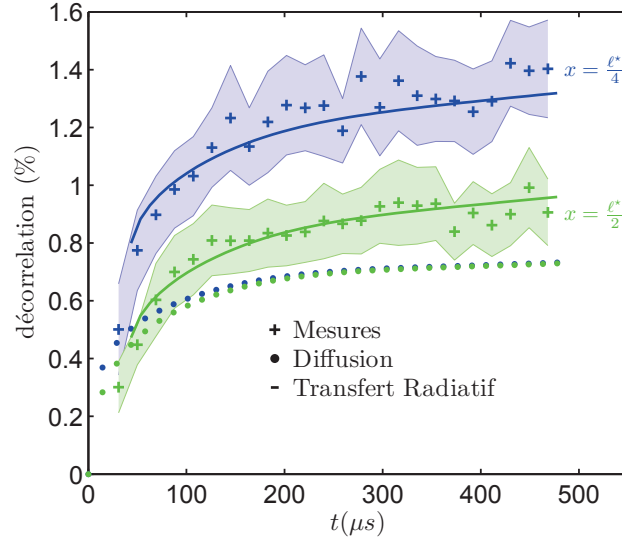


FIGURE 5.18 – Décorrélation pour un défaut ponctuel en champ proche :  $x = 0.25, 0.5\ell^*$  et  $h = 0$ . Nous superposons la décorrélation issue du noyau de la diffusion (pointillés), la décorrélation issue du noyau du transfert radiatif (traits forts) et les mesures issues des simulations (croix). Le noyau de la diffusion, qui omet la contribution de l'onde cohérente propagée de la source au défaut s'avère systématiquement faux.

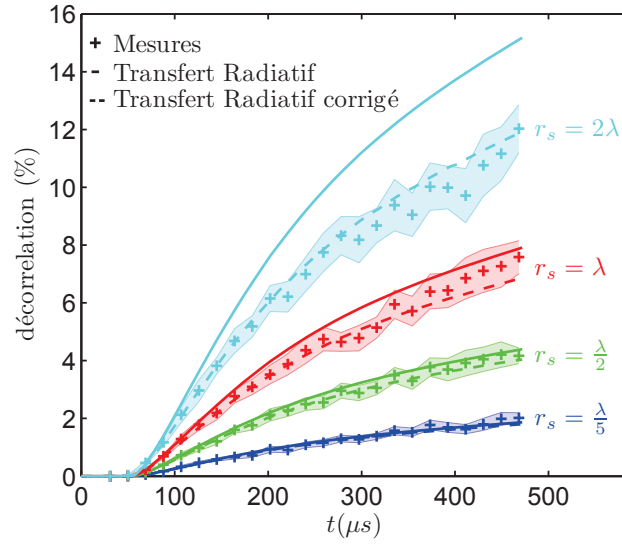


FIGURE 5.19 – Décorrélation pour des défauts en champ lointain :  $x = 4\ell^*$  et  $h = 4\ell^*$ . Les rayons des défauts sont :  $\frac{\lambda}{5}$ ,  $\frac{\lambda}{2}$ ,  $\lambda$  et  $2\lambda$ . Nous superposons la décorrélation issue du noyau du transfert radiatif (traits forts), la décorrélation issue du noyau corrigé à l'ordre 3 (transfert radiatif) (pointillés) et les mesures issues des simulations (croix). Comme attendu, la correction est d'autant plus importante que le défaut est gros.

Nous rappelons que le processus de diffusion est analogue à une marche aléatoire. Par exemple, une marche aléatoire sur réseau 1D à pas constant est décrite par l'équation de Fokker-Planck suivante :

$$\tau \frac{\partial P(x|x_0, t)}{\partial t} = \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 P(x|x_0, t)}{\partial x^2} \quad (5.62)$$

qui est analogue à l'équation de diffusion.  $P(x|x_0, t)$  représente la densité de probabilité du marcheur d'être en  $x$  à  $t$  sachant qu'il était en  $x_0$  à  $t = 0$ . La constante de diffusion associée à l'équation vaut  $D = \frac{a^2}{2\tau}$ , avec  $a$  la valeur du pas spatial et  $\tau$  la valeur du pas temporel.

Considérons une marche aléatoire isotrope sur un réseau 1D de  $N$  sites, avec des « sauts » limités aux premiers voisins, et des bords réfléchissants (Fig. 5.20)

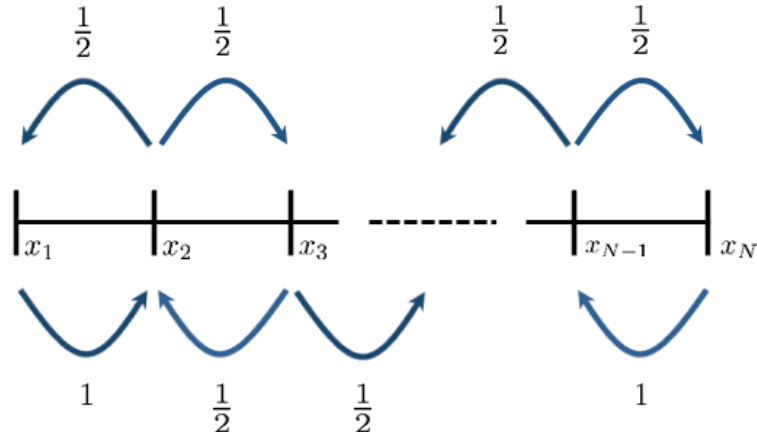


FIGURE 5.20 – Représentation schématique d'une marche aléatoire à 1D. Les transitions sont isotropes et limitées aux premiers voisins, sauf pour les bords, qui sont totalement réfléchissants.

Soit  $\mathbf{P}_n$  le vecteur contenant les densités de probabilité de présence en chacun des sites au temps  $t = n\tau$ . On a  $(\mathbf{P}_n)_i = P(x_i, n\tau)$  et l'on peut établir la relation de récurrence suivante :

$$\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{H} \mathbf{P}_n \quad (5.63)$$

où  $\mathbf{H}$  est une matrice de transfert qui contient les probabilités de transition de chaque site vers chaque autre. Dans notre cas, cela donne :

$$H_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0, N \text{ et } |i - j| = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } |i - j| = 1 \text{ et } j \neq 0, N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.64)$$

Connaissant la densité de probabilité initiale  $\mathbf{P}_0$ , on obtient directement :

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{H}^n \mathbf{P}_0 \quad (5.65)$$

Cette relation nous permet de calculer de manière approchée mais précise la solution de l'équation de diffusion à 1D avec bords réfléchissants. Mais tout l'intérêt de la méthode réside dans la validité générale de la formulation (5.65). On peut facilement construire la matrice  $\mathbf{H}$  en dimension 2 ou 3 en discrétisant des géométries complexes puis en choisissant les conditions aux bords et les probabilités de transitions voulues.

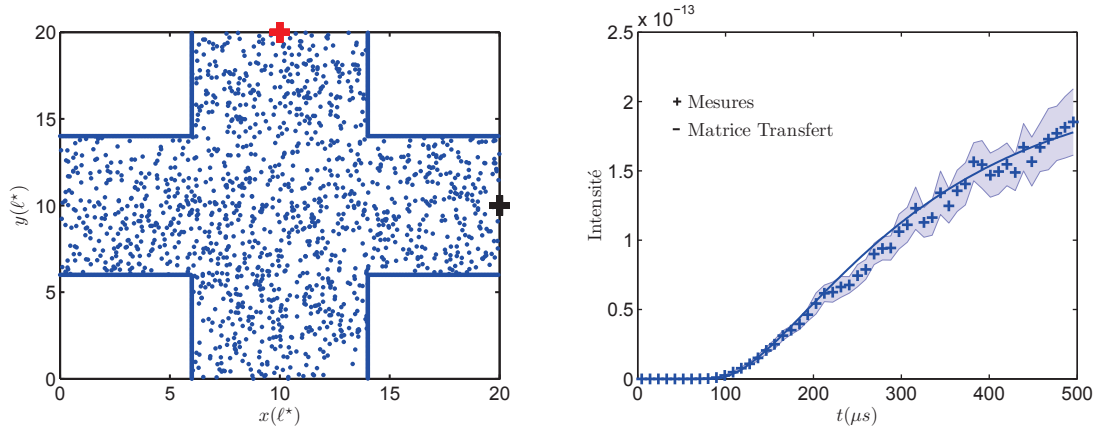


FIGURE 5.21 – À gauche : Géométrie en croix simulée. Un dixième des diffuseurs ponctuels du milieu sont représentés par des disques bleus (échelle non respectée). La source est en rouge et le récepteur en noir. À droite : Intensité simulée (croix) et intensité calculée par la méthode des matrices de transfert (trait fort).

Nous proposons d'illustrer la méthode en simulant une géométrie 2D en forme de croix (Figure 5.21, à gauche). À 2D, la constante de diffusion de l'équation de Fokker-Planck vaut  $D = \frac{a^2}{4\tau}$ . Par identification avec la constante de diffusion des ondes  $D = \frac{c\ell^*}{2}$ , on déduit les paramètres du réseau à simuler :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{a}{c} \\ a &= 2\ell^* \end{aligned} \quad (5.66)$$

Par commodité, nous définissons une matrice de transfert  $\mathbf{H}_c(11 \times 11)$  correspondant au réseau carré englobant la croix ( $20\ell^* \times 20\ell^*$ ). En appelant  $\mathfrak{C}$  l'ensemble des sites inclus dans la croix et  $\partial\mathfrak{C}$  le sous-ensemble des sites appartenant aux bords de la croix, les éléments de  $\mathbf{H}_c$  sont définis selon :

$$H_{cij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in \partial\mathfrak{C}, i \in \mathfrak{C} \text{ et } i \text{ voisin de } j \\ \frac{1}{4} & \text{si } j \in \{\mathfrak{C} \setminus \partial\mathfrak{C}\} \text{ et } i \text{ voisin de } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.67)$$

La densité de probabilité initiale est nulle partout sauf sur le site correspondant à la position de la source. On la note comme un vecteur colonne ou ket  $|\mathbf{S}\rangle$ . De même, le capteur peut se noter comme un vecteur ligne ou bra  $\langle \mathbf{R}|$ , non nul seulement sur la position de mesure de l'intensité. L'intensité se calcule finalement par :

$$I(n\tau) = \langle \mathbf{R} | \mathbf{H}_c^n | \mathbf{S} \rangle \quad (5.68)$$

Ce résultat est confronté à la mesure de l'intensité du champ simulé à la Figure 5.21 (à droite). On note qu'une étape d'interpolation et de normalisation a également été effectuée.

Pour conclure, nous avons estimé théoriquement la décorrélation des ondes de la coda induite par l'apparition d'un changement local de « structure » dans un milieu multi-diffusant. Dans le cas d'un défaut de section efficace  $\sigma$  suffisamment faible (qualitativement  $\sigma < \lambda$ ), la décorrélation est proportionnelle à  $\sigma$  et s'exprime à l'aide d'un noyau de sensibilité basé sur le transport de l'intensité dans le milieu. Après avoir étudié ce noyau pour différentes solutions du transport, nous l'avons confronté à des données issues de simulations numériques en différences finies. Ces simulations ont permis de confirmer la nécessité d'utiliser l'intensité solution du transfert radiatif pour décrire les mesures aux temps courts ou lorsque que le défaut est situé proche de l'un des capteurs.

Nous avons également montré que pour des défauts de section efficace plus importante ( $\sigma \geq \lambda$ ), il est nécessaire d'ajouter des termes correctifs au modèle initial. Ces termes permettent de prendre en compte les visites récurrentes du défaut.

Pour finir, nous avons proposé une méthode rapide permettant de construire le noyau dans des géométries complexes ou des situations plus générales que celles étudiées. Cette méthode est basée sur le calcul de l'intensité solution de la diffusion à l'aide de matrices de transfert.

Dans le chapitre suivant, nous étudierons le cas limite de l'apparition locale d'un faible contraste d'impédance dans le milieu. Le défaut est alors nommé « changement de vitesse ». La décorrélation associée à ce type de changement est très faible et nous verrons qu'il est plus judicieux de s'intéresser à la variation de temps d'arrivée (déphasage) des ondes de la coda.





# Chapitre 6

## Changement local de vitesse

Dans le chapitre précédent, nous avons modélisé la décorrélation des ondes diffuses engendrée par un changement local de structure (fort contraste d'impédance) dans le milieu. Les dépendances spatiale et temporelle de cette décorrélation s'expriment théoriquement à l'aide d'un noyau de sensibilité basé sur le transport de l'intensité.

Nous étudions ici le cas limite de l'apparition locale d'un faible contraste d'impédance dans le milieu. Le défaut est alors nommé changement de vitesse et nous nous intéressons à la variation de temps d'arrivée des ondes diffuses. En utilisant le formalisme développé au chapitre précédent et en se plaçant dans l'approximation de Born pour le défaut, nous retrouvons un résultat obtenu en terme probabiliste par Pacheco et Snieder (2005). Nous vérifions que ce changement de vitesse local engendre un changement de vitesse apparent des ondes diffuses. Contrairement au cas d'une variation globale de vitesse dans le milieu, les délais mesurables dans la coda ne croissent pas linéairement avec le temps mais dépendent du noyau de sensibilité étudié au chapitre précédent (section 5.2).

Ce modèle a été appliqué à l'analyse de données issues de simulations d'ondes élastiques dans un milieu 2D hétérogène (code SpecFem). Ce travail collaboratif, détaillé dans l'article Obermann *et al.* (2013b), vise à analyser la sensibilité de la coda sismique à un changement de vitesse dans une couche mince. Notre participation concerne principalement la modélisation du changement de vitesse apparent des ondes de volume de la coda. Une version légèrement modifiée de cet article sera présentée à la section 6.2 de ce chapitre.

### 6.1 Estimation théorique du déphasage

Dans le cas d'un changement faible mais global de vitesse, c'est à dire survenant dans tout le milieu, il existe une relation simple décrivant les variations de temps d'arrivée des ondes diffuses :

$$\frac{\delta t}{t} = -\frac{\delta c}{c}$$

$$\Leftrightarrow \delta t(t) = -\frac{\delta c}{c}t \quad (6.1)$$

Le déphasage  $\delta t(t)$  induit par la variation relative globale de vitesse  $\delta c/c$  croît linéairement avec le temps  $t$  dans la coda<sup>1</sup>.

Dans le cas d'un changement local, seule une partie des ondes est influencée par la variation de vitesse et cette relation n'est plus valable. En plus du déphasage, on peut également s'attendre à observer une distorsion ou décorrélation des ondes. Nous montrons par la suite que celle-ci est négligeable et que l'étude du déphasage est bien pertinente.

Nous conservons les notations précédentes en appelant  $g_1(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)$  la fonction de Green du milieu initial et  $g_2(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)$  celle du milieu final, pour une source placée en  $\mathbf{s}$  et un récepteur en  $\mathbf{r}$ . Comme dans le chapitre précédent (éq. 5.6), nous introduisons une fonction de corrélation  $w$ , mais cette fois-ci à deux temps différents dans la coda :

$$\overline{w}(t, \tau, \mathbf{s}, \mathbf{r}) = \overline{g_2(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t + \frac{\tau}{2})g_1^*(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t - \frac{\tau}{2})} \quad (6.2)$$

La variable  $\tau$  correspond au déphasage entre les fonctions de Green initiale et finale et le surlignage dénote toujours la moyenne d'ensemble. Pour se ramener à des expressions déjà connues, décomposons ces fonctions de Green sur leur composantes fréquentielles :

$$\begin{aligned} g_2(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t + \frac{\tau}{2}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_2^+(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \omega_2) e^{-i\omega_2(t + \frac{\tau}{2})} d\omega_2, \\ g_1^*(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t - \frac{\tau}{2}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_1^-(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \omega_1) e^{i\omega_1(t - \frac{\tau}{2})} d\omega_1 \end{aligned} \quad (6.3)$$

$G_2^+$  et  $G_1^-$  correspondent aux fonctions de Green causale et acausale de l'équation de Helmholtz dans le milieu final et initial respectivement. En insérant ces expressions dans l'équation (6.2) et après application du changement de variable  $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  et  $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ , on trouve :

$$\overline{w}(t, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \overline{G_2^+(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \omega + \frac{\Omega}{2})G_1^-(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \omega - \frac{\Omega}{2})} e^{-i\omega\tau} e^{-i\Omega t} d\Omega d\omega \quad (6.4)$$

où  $\omega$  est la variable conjuguée du déphasage  $\tau$  qui décrit les variations rapides du champ d'onde et  $\Omega$  est la variable conjuguée du temps  $t$  qui décrit les variations lentes de la moyenne d'ensemble de la corrélation. On cherche ici à déterminer la valeur du déphasage  $\tau_{\text{opt}}(t)$  qui maximise la corrélation  $\overline{w}(t, \tau)$  :

$$\left. \frac{d\overline{w}(t, \tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_{\text{opt}}} = 0$$

---

1. Dans le cas d'un milieu homogène rempli de diffuseurs discrets, cette relation peut s'avérer inexacte, notamment pour des diffuseurs résonnants (Leroy et Derode, 2008).

$$\Leftrightarrow \iint \overline{G_2^+(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \omega + \frac{\Omega}{2})} G_1^-(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \omega - \frac{\Omega}{2}) e^{-i\Omega t} d\Omega \omega e^{-i\omega \tau_{\text{opt}}} d\omega = 0 \quad (6.5)$$

Comme dans le chapitre précédent, pour calculer le terme de corrélation  $\overline{G_2^+ G_1^-}$ , il est nécessaire de développer les fonctions de Green des milieux initial et final. Nous commençons par supposer que le changement est suffisamment localisé pour être considéré comme ponctuel.

### 6.1.1 Défaut de vitesse ponctuel

Nous utilisons le développement du terme de corrélation  $\overline{G_2^+ G_1^-}$ , dérivé à la section 5.1.1 pour un défaut ponctuel situé en  $\mathbf{r}_0$  (équ. 5.15) :

$$\overline{G_2^+(\mathbf{s}, \mathbf{r}) G_1^-(\mathbf{s}, \mathbf{r})} = I_{11}^2 \Gamma(\mathbf{s}, \mathbf{r}) + I_{11}^2 I_{21}(\omega) \mathbf{t}_0(\omega) \Gamma(\mathbf{s}, \mathbf{r}_0) \Gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) \quad (6.6)$$

où l'on rappelle que  $\mathbf{t}_0(\omega)$  représente la matrice  $\mathbf{T}$  du défaut ponctuel situé en  $\mathbf{r}_0$  et  $\Gamma$  est le facteur de structure qui décrit toutes les séquences de diffusions possibles entre deux points. Les dépendances fréquentielles sont implicites pour alléger les notations. On rappelle que les termes  $I_{11}$  et  $I_{21}$  sont des intégrales dites de boucle<sup>2</sup> dont la valeur dépend de la dimension de l'espace. On rappelle également le lien entre facteur de structure et intensité normalisée (3.85) :

$$\Gamma(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \frac{c}{\ell I_{11}} I_{\Omega}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) \quad (6.7)$$

où  $I_{\Omega}$  désigne l'intensité solution de l'équation de diffusion normalisée (domaine fréquentiel),  $\ell$  le libre parcours moyen de diffusion et  $c$  la vitesse des ondes. Le terme de corrélation (6.6) se réécrit alors :

$$\overline{G_2^+(\mathbf{s}, \mathbf{r}) G_1^-(\mathbf{s}, \mathbf{r})} = \frac{c I_{11}}{\ell} I_{\Omega}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) + \frac{c^2 I_{21}(\omega)}{\ell^2} \mathbf{t}_0(\omega) I_{\Omega}(\mathbf{s}, \mathbf{r}_0) I_{\Omega}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) \quad (6.8)$$

On peut également effectuer la transformée inverse sur  $\Omega$  (équ. 6.5) pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int \overline{G_2^+(\mathbf{s}, \mathbf{r}) G_1^-(\mathbf{s}, \mathbf{r})} e^{-i\Omega t} d\Omega &\propto I_{11} I(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t) \\ &+ \frac{c I_{21}(\omega)}{\ell} \mathbf{t}_0(\omega) \int_0^t I(\mathbf{s}, \mathbf{r}_0, u) I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t - u) du \end{aligned} \quad (6.9)$$

---

2. Ces intégrales sont calculées en annexe, section A.2.

où le produit de convolution en temps découle du produit en fréquence. On injecte maintenant ce résultat (6.9) dans l'expression (6.5) que nous cherchons à annuler, pour obtenir après ré-arrangement :

$$\left. \frac{d\bar{w}(t, \tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_{\text{opt}}} = 0 \Leftrightarrow I_{11}I(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t) \int \omega e^{-i\omega\tau_{\text{opt}}} d\omega = -\frac{c}{\ell} \int_0^t I(\mathbf{s}, \mathbf{r}_0, u) I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t-u) du \int \omega I_{21}(\omega) \mathbf{t}_0(\omega) e^{-i\omega\tau_{\text{opt}}} d\omega \quad (6.10)$$

On suppose maintenant les signaux filtrés dans une bande de fréquence étroite  $\delta_\omega$  autour de  $\omega_c$ . On suppose également que le déphasage  $\tau_{\text{opt}}$  engendré par le changement de vitesse est faible devant la période centrale des signaux  $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$ . On peut alors effectuer l'approximation  $e^{-i\omega\tau_{\text{opt}}} \simeq 1 - i\omega\tau_{\text{opt}}$ . En s'aidant de la parité des fonctions  $I_{21}(\omega)$  (éq. A.24, A.19) et  $\mathbf{t}(\omega)$  (éq. 3.32), on peut calculer les intégrales de l'équation (6.10) :

$$\int \omega e^{-i\omega\tau_{\text{opt}}} d\omega \simeq -i\tau_{\text{opt}}\omega_c^2 \delta_\omega \text{ et} \quad (6.11)$$

$$\int \omega I_{21}(\omega) \mathbf{t}_0(\omega) e^{-i\omega\tau_{\text{opt}}} d\omega \simeq \delta_\omega I_{21}\omega_c (\Re(\mathbf{t}_0) + \tau_{\text{opt}}\omega_c \Im(\mathbf{t}_0)) \quad (6.12)$$

Le défaut présentant ici un faible contraste d'impédance, on peut le caractériser dans l'approximation de Born<sup>3</sup>, qui consiste à remplacer la matrice  $\mathbf{T}$  par le potentiel  $\mathbf{V}$ . Cela revient à ne garder que le premier terme du développement de la matrice  $\mathbf{t}_0$  (éq. 3.31) étudié à la section 3.2.2.

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_0 &= V(\mathbf{r}_0)v_s \\ &= v_s \omega_c^2 \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c(r_0)^2} \right) \\ &\simeq 2v_s k^2 \frac{\delta c}{c} \end{aligned} \quad (6.13)$$

où la vitesse des ondes dans le défaut s'écrit  $c(r_0) = c + \delta c$  avec  $c$  la vitesse du milieu sous-jacent et en appliquant un développement limité à l'ordre 1 en  $\delta c/c$ . Le volume du défaut vaut  $v_s$  et  $k$  est le nombre d'onde central des signaux. Dans l'approximation de Born, la matrice  $\mathbf{T}$  du défaut est réelle ( $\Im(\mathbf{t}_0) = 0$ )<sup>4</sup>, et l'équation (6.10) se simplifie alors pour donner :

---

3. L'approximation de Born n'est appliquée qu'au défaut local de vitesse, et non pas à l'ensemble du milieu qui est bien multi-diffusant.

4. Dans le chapitre précédent, la décorrélation a été reliée exclusivement à  $\Im(\mathbf{t}_0)$ . Cela implique que la décorrélation engendrée par un changement faible de vitesse est négligeable. L'étude du déphasage dans cette situation est donc pertinente.

$$\left. \frac{d\bar{\omega}(t, \tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_{\text{opt}}} = 0 \Leftrightarrow \tau_{\text{opt}} = \frac{I_{21}}{iI_{11}k\ell} \mathbf{t}_0 \frac{\int_0^t I(\mathbf{s}, \mathbf{r}_0, u) I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t-u) du}{I(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)} \quad (6.14)$$

Le ratio des intégrales de boucles vaut  $\frac{I_{21}}{I_{11}} = -\frac{i\ell}{2k}$  à 2D comme à 3D (voir annexe, section A.2). En insérant également le développement limité de la matrice  $\mathbf{t}_0$  dans l'équation (6.14), on obtient finalement :

$$\tau_{\text{opt}}(t) = -\frac{\delta c}{c} v_s \frac{\int_0^t I(\mathbf{s}, \mathbf{r}_0, u) I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t-u) du}{I(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)} \quad (6.15)$$

où l'on reconnaît l'expression du noyau de sensibilité  $K$  étudié au chapitre précédent :

$$K(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = \frac{\int_0^t I(\mathbf{s}, \mathbf{r}_0, u) I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t-u) du}{I(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)} \quad (6.16)$$

pour une source située en  $\mathbf{s}$ , un récepteur en  $\mathbf{r}$ , le défaut ponctuel en  $\mathbf{r}_0$  et où la mesure est effectuée au temps  $t$  dans la coda.

Dans cette situation de changement local de vitesse, le déphasage  $\tau(t)$  est proportionnel à la variation relative de vitesse  $\delta c/c$  et au volume  $v_s$  du défaut mais ne croît pas linéairement avec le temps dans la coda. De manière équivalente, on peut étudier le coefficient d'étirement<sup>5</sup>  $\epsilon(t) = -\tau_{\text{opt}}(t)/t$  mesurable dans une fenêtre étroite autour du temps  $t$  dans la coda :

$$\epsilon(t) = \frac{\delta c}{c} \frac{v_s}{t} K(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) \quad (6.17)$$

La variation relative de vitesse apparente évolue également avec le temps dans la coda. En pratique, c'est un signe qui permet de discriminer un changement local de vitesse d'un changement global.

### 6.1.2 Défaut de vitesse étendu

Contrairement au cas de l'étude de la décorrélation engendrée par un changement de structure (fort contraste d'impédance), ici, l'approximation de Born nous permet de dériver l'expression du déphasage  $\tau$  associé à un changement de vitesse étendu spatialement. En effet, dans l'approximation de Born, le terme de corrélation  $G_2^+ G_1^-$  peut s'écrire :

---

5. Ce coefficient d'étirement est également nommé variation relative de vitesse apparente. Il correspond au changement de vitesse global équivalent, et dépend ici du temps de mesure dans la coda.

$$\overline{G_2^+(\mathbf{s}, \mathbf{r})G_1^-(\mathbf{s}, \mathbf{r})} = I_{11}^2 \Gamma(\mathbf{s}, \mathbf{r}) + I_{11}^2 I_{21}(\omega) \int \Gamma(\mathbf{s}, \mathbf{r}_0) V(\mathbf{r}_0) \Gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) d\mathbf{r}_0 \quad (6.18)$$

qui est une généralisation de l'expression (6.6) dans le cas d'un défaut étendu. Le potentiel  $V$  du défaut étendu peut s'approximer similairement à (6.13) :

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}_0) &= \omega_c^2 \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c(r_0)^2} \right) \\ &\simeq 2k^2 \frac{\delta c}{c}(\mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (6.19)$$

où la variation relative de vitesse dépend maintenant de la position  $\mathbf{r}_0$  dans le milieu étudié. Les étapes intermédiaires de calcul s'effectuent comme précédemment et le résultat généralisé s'écrit :

$$\tau_{\text{opt}}(t) = - \int_{\text{Vol}} \frac{\delta c}{c}(\mathbf{r}_0) K(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) d\mathbf{r}_0 \quad (6.20)$$

où l'intégrale est effectuée sur tout le volume étudié et où la variation relative de vitesse  $\frac{\delta c}{c}$  est nulle à l'extérieur du défaut. Cette formulation est identique à celle dérivée par Pacheco et Snieder (2005) en terme de probabilité de transport.

Si l'on suppose que la variation relative de vitesse s'applique à l'ensemble du milieu étudié, on obtient :

$$\tau_{\text{opt}}(t) = - \frac{\delta c}{c} \int_{\text{Vol}} K(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) d\mathbf{r}_0 \quad (6.21)$$

L'intégrale spatiale du noyau se calcule :

$$\begin{aligned} \int_{\text{Vol}} K(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) d\mathbf{r}_0 &= \frac{\int_0^t \int_{\text{Vol}} I(\mathbf{s}, \mathbf{r}_0, u) I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t-u) d\mathbf{r}_0 du}{I(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)} \\ &= \frac{I(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t) \int_0^t du}{I(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)} \\ &= t \end{aligned} \quad (6.22)$$

en utilisant l'identité  $\int_{\text{Vol}} I(\mathbf{s}, \mathbf{r}_0, u) I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, t-u) d\mathbf{r}_0 = I(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)$ , qui est une formulation particulière de l'équation de Chapman-Kolmogorov. Cette propriété est également soulignée dans Pacheco et Snieder (2005). Elle permet d'interpréter le noyau  $K(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t)$

comme une densité volumique de temps effectif passé au point  $\mathbf{r}_0$  par les ondes ayant voyagé de  $\mathbf{s}$  à  $\mathbf{r}$  durant un temps  $t$ . On peut alors terminer le calcul de l'expression (6.21), pour obtenir :

$$\frac{\tau_{\text{opt}}(t)}{t} = -\frac{\delta c}{c} \quad (6.23)$$

On retrouve bien l'identité (6.1) introduite au début du chapitre pour caractériser le déphasage induit par un changement de vitesse global.

Cette généralisation aux défauts étendus spatialement n'est pas directement transposable à l'étude de la décorrélation générée par un changement de structure. L'approximation de Born utilisée ici pour le défaut de vitesse ne serait pas valide pour un fort contraste d'impédance. Elle permet de modéliser plus facilement des cas réalistes de changements de vitesse survenant dans un milieu hétérogène.

Dans la section suivante, nous nous intéressons justement à la sensibilité de la coda sismique à un changement de vitesse qui s'opère dans une couche mince du sous-sol. Cette étude est basée sur des simulations numériques d'ondes élastiques en milieu 2D hétérogène, réalisées par Anne Obermann. Notre contribution concerne principalement la modélisation de la sensibilité des ondes de volume à l'aide de la représentation intégrale du noyau (6.20). Une version légèrement modifiée de ce travail (Obermann *et al.*, 2013b) est présentée à la section suivante.

## 6.2 Sensibilité de la coda sismique à des changements en profondeur

### Depth sensitivity of seismic coda waves to velocity perturbations in an elastic heterogeneous medium

Anne Obermann, Thomas Planès, Eric Larose, Christoph Sens-Schönfelder, Michel Campillo.

Article accepté dans *Geophysical Journal International*.

#### Abstract :

Numerous monitoring applications make use of seismic coda waves to evaluate velocity changes in the Earth. This raises the question of the spatial sensitivity of coda-wave-based measurements. Here, we investigate the depth sensitivity of coda waves to local velocity perturbations using two-dimensional numerical wave-field simulations. We calculate the impulse response at the surface before and after a slight perturbation of the velocity within a thin layer at depth is introduced. We perform a parametric analysis of the observed apparent relative velocity changes,  $\varepsilon^{\text{obs}}$ , versus the depth of the thin



perturbed layer. Through the analysis of the decay of  $\varepsilon^{\text{obs}}$ , we can discriminate between two different regimes : one for a shallow perturbation and the other for a deep perturbation. We interpret the first regime as the footprint of the one-dimensional depth sensitivity of the fundamental surface-wave mode. To interpret the second regime, we need to model the sensitivity of the multiply scattered body waves in the bulk. We show that the depth sensitivity of coda waves can be modeled as a combination of bulk-wave sensitivity and surface-wave sensitivity. The transition between these two regimes is governed by mode conversions due to scattering. We indicate the importance of surface waves for the sensitivity of coda waves at shallow depths and at early times in the coda. At later times, bulk waves clearly dominate the depth sensitivity and offer the possibility of monitoring changes at depths below the sensitivity of the surface waves. Based on the transition between the two regimes, we can discriminate a change that occurs at the surface from a change that occurs at depth. This is illustrated for shallow depth perturbations through an example from lunar data.

### 6.2.1 Introduction

The detection of temporal changes has been successfully applied to different areas in seismology. These areas include the monitoring of oil reservoirs (Meunier *et al.*, 2001), volcanoes (Grêt *et al.*, 2005; Brenguier *et al.*, 2008b), fault zones (Brenguier *et al.*, 2008a), landslides (Mainsant *et al.*, 2012), and even subduction zones (Rivet *et al.*, 2011). A central question in the interpretation of the changes detected is that of the depth of the velocity variations. A recent discussion of possible causes for velocity perturbations and their depth range can be found in Sens-Schönfelder et Wegler (2011). Observations of velocity changes that occur at different depths have come from investigations using combinations of borehole and surface sensors, which have allowed the identification of changes at shallow depths (Sawazaki *et al.*, 2009; Nakata et Snieder, 2011). With interpretations of coda-wave measurements, Rivet *et al.* (2011) located changes that occurred at great depth in a subduction zone. Their interpretation was based on the assumption that coda waves are dominated by Rayleigh waves that follow a two-dimensional (2D) diffusion process at the free surface. The depth sensitivity is therefore limited to the depth sensitivity of the surface waves. In contrast, Sens-Schönfelder et Wegler (2006) investigated shallow velocity changes at a volcano, which they interpreted as a response to changes in the hydrological system. Supported by the lapse-time dependence of the apparent relative velocity change, their interpretation was based on the assumption that the coda is dominated by body waves that show slower decay of the sensitivity with depth.

We know that regions that show tectonic and/or volcanic activity are highly heterogeneous (Abubakirov et Gusev, 1990; Aki et Chouet, 1975; Aki et Ferrazzini, 2000; Sato et Fehler, 1998). In particular, heterogeneities located right beneath the free surface convert surface waves into bulk waves, and reciprocally, bulk waves into surface waves

(e.g Larose *et al.* (2005b)). In the present study, we deal with waves that propagate in media containing vertical and horizontal heterogeneities. We investigate the following questions :

1. Is the assumption of the surface-wave diffusion process sufficient to describe the sensitivity of coda waves, or does the bulk-wave diffusion play a role in fully heterogeneous media ?
2. Can changes at depth be detected if the sources and sensors are placed at the free surface ?
3. If changes can be detected, what is the depth sensitivity of the coda waves in this multiple scattering regime ?
4. How can we differentiate between shallow and deep co-seismic velocity variations ?

In this study, we will answer these questions on the basis of 2D numerical simulations. In section 6.2.2, we describe the elastic heterogeneous medium, introduce the velocity perturbation, and characterize the degree of heterogeneity. In section 6.2.3, we separately describe the depth sensitivity kernel of Rayleigh and bulk waves, and propose a linear combination of bulk and surface wave sensitivity to model the depth sensitivity of coda waves. In section 6.2.4, we compare theoretical predictions with numerical simulations. We demonstrate the accuracy of the model for weak changes located at different depths. These theoretical predictions are also tested at different times in the coda and for different degrees of heterogeneity. We emphasize the importance of bulk waves for the depth sensitivity of coda waves collected by arrays at the free surface. We obtain a model that shows the partition ratio of surface-wave and bulk-wave sensitivity at different times in the coda and for different levels of heterogeneities. In the last part, we use lunar data to demonstrate the practical relevance of our findings.

## 6.2.2 Numerical simulations

To study the sensitivity of coda waves to velocity perturbations at depth, we perform numerical simulations of seismic waves in a heterogeneous 2D elastic medium without intrinsic attenuation. The scattering is weakly anisotropic but the medium itself does not show any preferential direction.

To create the heterogeneous 2D elastic medium, we follow the procedure described by Frankel et Clayton (1986). The 2D velocity field has a constant background P-wave velocity  $v_p^0$  with superimposed spatial velocity fluctuations  $\delta v_p(x, z)$  that constitute the scatterers. The total P-wave velocity can be decomposed as :

$$v_p(x, z) = v_p^0 + \delta v_p(x, z). \quad (6.24)$$

The total S-wave velocity relates to the total P-wave velocity, as  $v_s = \frac{v_p}{\sqrt{3}}$ , and thus undergoes the same respective velocity variations. The velocity fluctuations  $\delta v_p(x, z)$  are themselves characterized by a spatial autocorrelation function. The main statistical

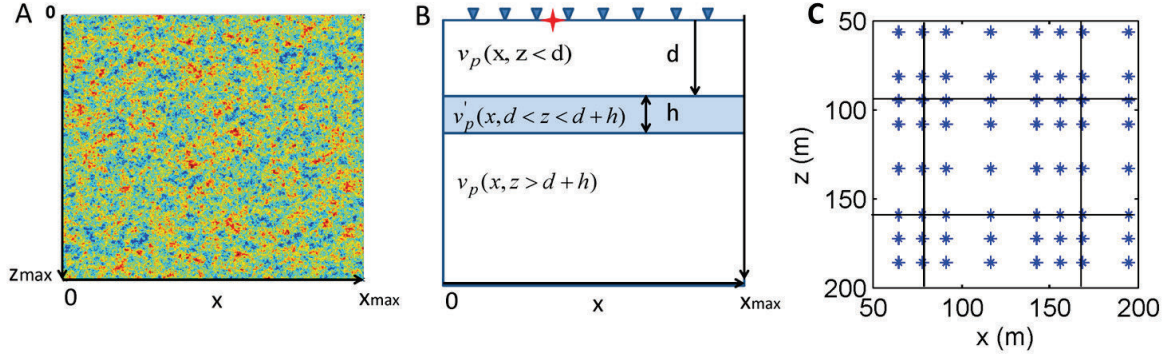


FIGURE 6.1 – A. Medium with von-Karman correlation function. The correlation distance is  $a \approx \lambda_0$ .  $x$  and  $z$  are  $50\lambda_0 \times 50\lambda_0$ . B. Configuration for the study of depth sensitivity. A medium of dimension  $x, z$  contains a thin layer ( $h$ ) with a small velocity perturbation at depth  $d$  (note that the thickness of  $h$  is exaggerated for better visualization). C. Grid element used for the simulations. The black lines limit the grid points (blue stars) of one element.

parameters that characterize the medium are described in the next paragraph. Figure 6.1A shows a typical realization of a random medium.

In this initial velocity model, we introduce a small velocity perturbation  $\frac{dv}{v}$  in a layer of thickness  $h$  at depth  $d$ , as shown in Figure 6.1B. The perturbed velocity  $v'_p$  in the layer is proportional to the velocity  $v_p$  :

$$v'_p(x, z) = \begin{cases} v_p(x, z) \cdot (1 + \frac{dv}{v}) & \text{for } d < z < d + h, \\ v_p(x, z) & \text{for } z < d \text{ or } z > d + h. \end{cases} \quad (6.25)$$

We take  $v_p^0 = 6500$  m/s and  $dv = 100$  m/s which corresponds to a relative velocity change of  $\frac{dv}{v} = 1.54\%$ .

We simulate a semi-infinite medium with a free surface by imposing three absorbing conditions at the sides and one traction-free condition at the surface. To solve the wave equation, we use the 2D spectral-element method developed by Komatitsch et Vilotte (1998) and implemented in the SPECFEM2D solver, version 6.1, by Tromp *et al.* (2008). An element of the discretization grid is shown within the black lines in Figure 6.1C. We place a receiver array and a source at the free surface.

For the simulations, we use a vertical force as the source mechanism, with a central frequency of  $f_0 = 20$  Hz, and a frequency bandwidth of  $\Delta f = 12$  Hz. The corresponding wavelength for the P-wave is  $\lambda_0 = \frac{v_p^0}{f_0} = 325$  m. We want to note here that the perturbed layer has a thickness of only 200 m, and it is therefore thinner than  $\lambda_0$ . The grid size is  $16.8 \times 16.8$  km<sup>2</sup> ( $50\lambda_0 \times 50\lambda_0$ ), with a 20 m spatial pitch ( $\approx \lambda_0/20$ ). We compute the displacement  $\varphi(t)$  for waves propagating in the initial medium  $v_p(x, z)$ , and  $\varphi'(t)$  for waves propagating in the slightly perturbed medium  $v'_p(x, z)$ . This procedure is reproduced for different depth positions  $d$  of the layer. All the important parameters for the

TABLE 6.1 – Physical parameters of the numerical simulations used in the present study.

Notation	Value	Description
L	$16.8 \times 16.8 \text{ km}^2$	Grid size
$\Delta x, \Delta z$	20 m	Grid spacing
	9 s	Record length
$\Delta t$	$3 \cdot 10^{-4} \text{ s}$	Time step
$f_0$	20 Hz	Source frequency
$\Delta f$	12 Hz	Source bandwidth
a	300 m	Correlation length
$\sigma$	5, 10, 15, 20, 30 %	Velocity fluctuations
$v_p$		Initial P-wave velocity field
$v'_p$		Perturbed P-wave velocity field
$v_p^0$	6500 m/s	Mean P-wave velocity
$v_s^0$	3750 m/s	Mean S-wave velocity
$\lambda_0$	325 m	Central P-wavelength
h	200 m	Thickness of perturbed layer
d		Depth of perturbed layer
$\frac{dv}{v}$	1.54%	Relative velocity change
$\varepsilon$		Apparent relative velocity change

simulation are summarized in table 6.1. In the following sections, we only display results for a source-receiver distance of 4 km.

### Characterization of the heterogeneous medium

In this part, we characterize the level of heterogeneity of the medium. In the first subsection, we discuss the correlation function that we chose for the random medium in more detail. In the second subsection, we determine the equipartition ratio and therewith the energy velocity ratio. Then in the last subsection, we provide special focus on the determination of the scattering ( $\ell$ ) and transport ( $\ell^*$ ) mean free paths. These quantities are important for the theoretical model in section 6.2.4.

**Autocorrelation function of the random medium :** For the velocity model  $v_p(x, z)$ , we decided to work with a von-Karman type autocorrelation function, as this model is consistent with the general observations concerning rock and surface geology, which show very rough behaviors at small length scales (Frankel et Clayton, 1986; Holliger et Levander, 1992). This correlation function is defined as Tatarskii (1961) :

$$N(r) = \frac{1}{2^{m-1}\Gamma(m)} \left(\frac{r}{a}\right)^m K_m\left(\frac{r}{a}\right) \sigma^2, \quad (6.26)$$

where  $K_m(x)$  is a modified Bessel function of order  $m$ ,  $\Gamma(m)$  is the gamma function,  $r$  is the offset (or spatial lag),  $a$  is the correlation distance and  $\sigma$  the relative standard

deviation of the velocity. We consider a specific type of von Karman function, where  $m$  is 0.5. For this case, the two dimensional Fourier transform  $\Phi_{\text{Karman}}(k_r)$  that represents the power spectrum of the medium fluctuations, is given by :

$$\Phi_{\text{Karman}}(k_r) = \frac{a^2}{1 + k_r^2 a^2} \sigma^2, \quad (6.27)$$

where  $k_r$  is the radial wavenumber. We chose  $a \approx \lambda_0$  to allow strong interactions between waves and heterogeneities, and to enhance scattering.  $\sigma$  ranges from  $\sigma = 5\%$  to  $30\%$ . For each configuration, we perform numerical simulations in ten different media that obey the same statistics (for averaging purposes).

**Equipartition ratio :** In a heterogeneous elastic medium, waves propagate both as P-waves and S-waves, and they are repeatedly converted from one state to another. The available elastic energy in the phase space at long times will be equally distributed among all of the possible states of the P-waves and S-waves (Weaver, 1982, 1985). This phenomenon is referred to as the equipartition of seismic waves (Hennino *et al.*, 2001). In an unbounded 2D medium, the modes are plane waves with either SV or P polarization. If  $v_s = \frac{v_p}{\sqrt{3}}$ , the equipartition ratio in two dimensions reads :

$$\langle S^2 \rangle / \langle P^2 \rangle = 3, \quad (6.28)$$

where  $S$  and  $P$  are the amplitudes of the S-waves and P-waves respectively. To verify the equipartition ratio, we place a source close to the free surface. We then place 150 receivers in a vertical line in the middle of the medium. The top receiver is still several wavelengths away from the free surface. We calculate the energy ratio between the squared curl and the squared divergence of the wave field in a gliding time-section. We average over the time sections and 50 realizations of the random medium. The data yield a ratio of  $\langle S^2 \rangle / \langle P^2 \rangle = 3.4$ . Repeating the experiment and considering four reflecting boundaries yields a ratio of exactly 3. We conclude that the difference between the experiment with a free surface and three absorbing boundaries and the theory for infinite space is due to the absorbing boundary conditions and the surface. Boundaries appear to absorb P-waves more quickly than S-waves. The energy velocity  $c$  which reflects the celerity at which the seismic energy is transported, can thus be approximated according to the energy ratio :

$$\frac{1}{c} = \frac{0.77}{v_s} + \frac{0.23}{v_p}. \quad (6.29)$$

**Determination of the scattering mean free path :** When the scattering is isotropic (i.e., inhomogeneities scatter equal amounts of energy in all directions),  $\ell^* = \ell$ . In our case, where the correlation length and wavelength are similar ( $a \approx \lambda_0$ ), scattering is not completely isotropic. We would expect  $\ell^* > \ell$ .

In the following, we determine  $\ell^*$  and  $\ell$  numerically from the coherent and incoherent parts of the recorded signals. The coherent part of the waveform is the wave that resists

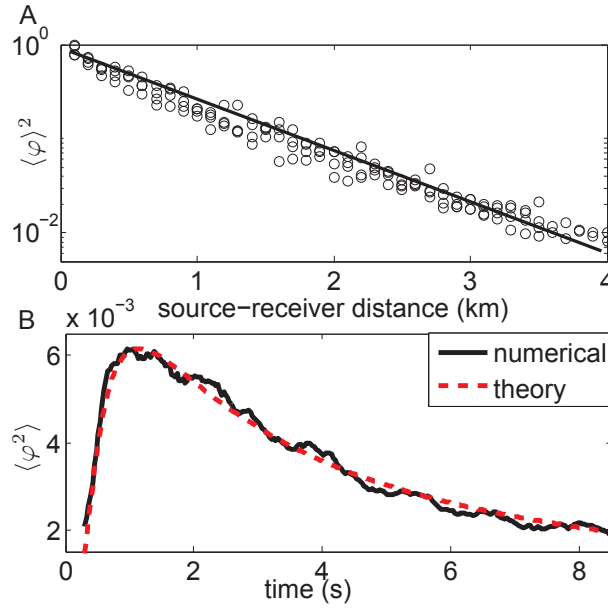


FIGURE 6.2 – A. Logarithm of the normalized coherent Intensity  $\langle \varphi \rangle^2$  versus source-receiver distance averaged over 50 simulations. After correcting the geometrical spreading, the slope is proportional to  $-1/\ell$ . B. Normalized incoherent intensity  $\langle \varphi^2 \rangle$  versus time.  $\ell^*$  is calculated from the diffusion constant of the diffusion equation that gives the best fit.

averaging over different realizations of disorder. The incoherent part of the waveform is constituted by waves vanishing while averaging over disorder.

We arrange 148 receivers in a cross-shape array in the initial heterogeneous medium. The spacing between the receivers is 200 m. The source is placed in the center of the receivers. For this simulation, all four of the boundaries are reflecting. To have enough data to average, we ran 50 realizations with this configuration in media that obey the same statistics.

From the coherent part  $\langle \varphi(t) \rangle$  of the waveform, we determine the scattering mean free path  $\ell$  following Derode *et al.* (2001). The power spectrum of the coherent signal  $|\langle H(\omega) \rangle|^2$  is linked to the scattering mean free path  $\ell$  via :

$$|\langle H(\omega) \rangle|^2 = \exp\left(-\frac{x}{\ell}\right), \quad (6.30)$$

where  $x$  denotes the distance between source and receiver in the medium. In Figure 6.2A, we plot the logarithm of the normalized energy versus the source-receiver distance. The slope of the regression line is  $-1/\ell$ . The results for different  $\sigma$  are given in Table 6.2.

From the incoherent part of the waveform, we determine the transport mean free path  $\ell^*$ . We look at the energy envelope of the waveforms. We take a sliding time window of  $2T=0.3$  s, which corresponds to six periods, and we calculate the average intensity in



TABLE 6.2 – Scattering mean free path and transport mean free path calculated experimentally for models with different amounts of heterogeneity.

Model	Scattering mean free path ( $\ell$ )	Transport mean free path ( $\ell^*$ )
	$\pm 5\%$	$\pm 10\%$
$\sigma=5\%$	10000 m	13000 m
$\sigma=10\%$	2200 m	2700 m
$\sigma=15\%$	1200 m	1500 m
$\sigma=20\%$	900 m	940 m
$\sigma=30\%$	500 m	450 m

this window according to :

$$I(t) = \left\langle \varphi(\tau)^2 \right\rangle_{\tau \in [t-T, t+T]} \quad (6.31)$$

We then average the intensity over 50 models that obey the same statistics. We search for the diffusion constant  $D$  that gives the best fit with the diffusion Equation and we calculate  $\ell^*$ . In Figure 6.2B we illustrate the intensity for a model with  $\sigma=20\%$  and its fit with the diffusion equation.

Table 6.2 gives the results for the scattering mean free paths that were obtained from numerical calculations for media with different degrees of heterogeneity  $\sigma$ . We note that  $\ell$  and  $\ell^*$  have close values, which indicates only weakly anisotropic scattering ( $\ell \approx \ell^*$ ). The uncertainties for the measures are the standard deviations that we obtained by averaging over 50 models.

### Determination of the apparent relative velocity changes with the stretching technique

We now use the numerical simulation with one free surface and three absorbing boundaries. We run a first experiment with an initial model  $v_p$ , and then a second with a perturbed velocity  $v'_p$  in a layer. Figure 6.3 shows the seismograms for an initial (blue) and a perturbed (red) medium for a receiver 2 km away from the source. The disturbance occurs at 50 m in depth in a medium with velocity fluctuations of  $\sigma = 20\%$ . By zooming into the coda of the seismograms, we can see that the perturbed seismogram lags behind in time with respect to the unperturbed seismogram, while the shape of the wave train remains largely unchanged.

We use the stretching technique to analyze these apparent relative velocity changes in the coda of the perturbed seismograms (Lobkis et Weaver, 2003; Sens-Schönfelder et Wegler, 2006). We assume that the perturbation of the signal can be measured as the effect of a slight change of its global velocity  $\delta V/V$ . It has been stretched or compressed in time in comparison to the unperturbed signal by a factor  $t(1 - \varepsilon)$ , where  $\varepsilon = \delta V/V$ . To obtain the optimal value for  $\delta V/V$ , we test systematically various values of  $\varepsilon$ . For each  $\varepsilon$  we calculate the correlation coefficient  $CC$  of the perturbed stretched signal  $\varphi'$  and the unperturbed signal  $\varphi$  :

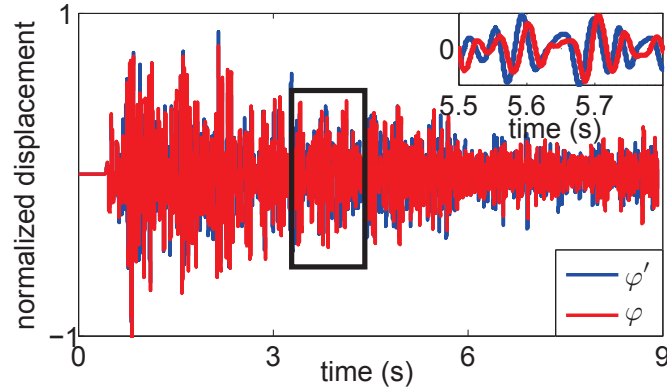


FIGURE 6.3 – Synthetic seismograms recorded with (blue) and without (red) perturbed layer at 50 m in depth. The black box indicates the a time window for the stretching around 3.6 s. Inset : zoom in on the unperturbed and perturbed seismograms.

$$CC(\varepsilon) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \varphi' [t(1 - \varepsilon)] \varphi [t] dt}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \varphi'^2 [t(1 - \varepsilon)] dt \int_{t_1}^{t_2} \varphi^2 [t] dt}}, \quad (6.32)$$

where  $t_1$  and  $t_2$  are the beginning and end of the time window used. The value of  $\varepsilon$ , that maximizes the cross-correlation coefficient between the perturbed and the unperturbed signals at a given time corresponds to the observed value ( $\varepsilon^{\text{obs}}$ ) of the apparent relative velocity change. For more detailed information, the reader should refer to Hadziioannou *et al.* (2009), for example. We apply this procedure to calculate the apparent relative velocity changes for all of the depth positions of the perturbed layer. The length of the time window is 1.5 s, and it is centered at different times in the coda.

### Results for the apparent relative velocity changes with depth

When analyzing the apparent relative velocity changes  $\varepsilon^{\text{obs}}$  versus the depth of the perturbed layer in Figure 6.4, we observe a decrease of  $\varepsilon^{\text{obs}}$  with depth, which testifies to reduced sensitivity of our measurements to changes at greater depths. We can discriminate two different regimes of sensitivity : for shallow and deep perturbed layers. Their separation is marked in figure 6.4 with the dash-dotted line. In the first regime, which concerns the early part of the slope, the sensitivity of  $\varepsilon^{\text{obs}}$  decays rapidly with depth, until a depth of approximately half the central wavelength  $\lambda_0$ . In the second regime, which concerns the later part of the slope, the slower decay results in a deeper sensitivity.

We interpret the rapid decay (shallow perturbed layers) as the footprint of the vertical depth sensitivity of the fundamental mode of the surface waves. For perturbations at greater depths (deep perturbed layers), we propose a model based on 2D diffusion of body waves. We will show in the following sections that we can model the apparent relative velocity changes  $\varepsilon^{\text{Bulk}}$  and  $\varepsilon^{\text{Surf}}$ , computed for the bulk and surface wave sensitivities



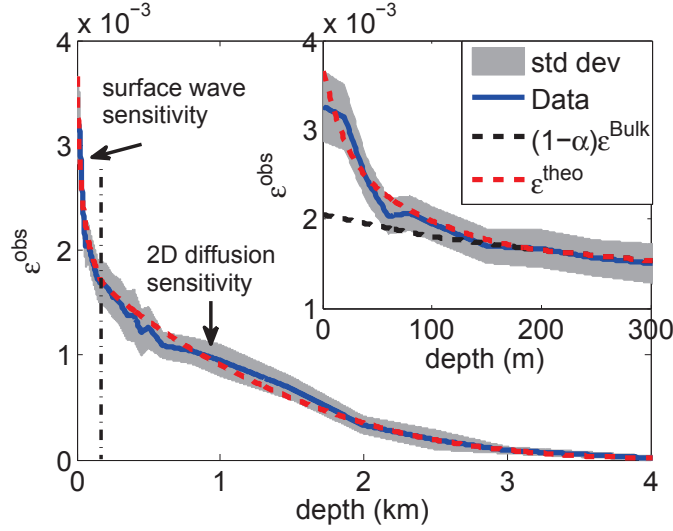


FIGURE 6.4 – Apparent relative velocity changes with depth of the perturbed layer averaged over ten realizations ( $\sigma = 20\%$ ). We can discriminate two different regimes of sensitivity for a shallow and a deep perturbed layer marked by the black chain line. The modeled data (red)  $\varepsilon^{\text{theo}}(d, t = 3.6 \text{ s})$  for the depth sensitivity of coda waves fit the observations very well. Inset : importance of the surface waves to describe the depth sensitivity, as the bulk regime  $(1 - \alpha)\varepsilon^{\text{Bulk}}$  alone cannot account for the steep slope at short times.

according to :

$$\varepsilon^{\text{theo}}(d, t) = \alpha(t)\varepsilon^{\text{Surf}}(d) + (1 - \alpha(t))\varepsilon^{\text{Bulk}}(d, t), \quad (6.33)$$

where  $\varepsilon^{\text{theo}}(d, t)$  is the modeled relative velocity change and  $\alpha$  the fitting parameter, or the partition coefficient. Note that this partition coefficient is different from the equipartition ratio, as it integrates the time spent in each state of the wave (bulk or surface). In section 6.2.3, we study the computation of the relative velocity changes  $\varepsilon^{\text{Bulk}}$  and  $\varepsilon^{\text{Surf}}$  in the bulk and surface wave sensitivity regime independently.

### 6.2.3 Modeling the two sensitivity kernels

In this section we describe the 1D surface wave regime and the 2D diffusion regime, which we use to model the depth sensitivity of the coda waves. For the bulk waves, we will compare an approach based on the diffusion solution to an approach based on the radiative transfer solution.

#### Surface-wave sensitivity

To study the depth penetration of surface-wave energy independent of bulk waves, we propagate a pulse in a homogeneous medium (constant velocity, no fluctuations). This

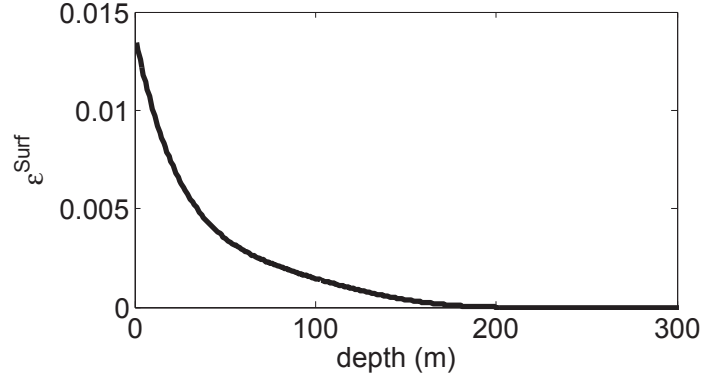


FIGURE 6.5 – Apparent relative velocity changes  $\epsilon^{\text{Surf}}(d)$  for the 1D surface-wave sensitivity regime as a function of the depth of the perturbed layer.

medium does not allow conversion scattering into bulk waves. Similar to the previous numerical simulations, we introduce a thin layer with a slightly different velocity ( $\frac{dv}{v} = 1.54\%$ ). Figure 6.5 shows the apparent relative velocity changes  $\epsilon^{\text{Surf}}(d)$  versus the depth of the layers that were measured from the direct arrivals. As can be seen, the surface wave sensitivity decays very rapidly with depth and disappears entirely after 2/3 of the central wavelength  $\lambda_0$ .

### Bulk sensitivity : the diffusive kernel approach

As we have seen previously, the apparent relative velocity changes of the seismograms can be quantified by a stretching factor  $\epsilon^{\text{obs}}$ . The theoretical bulk contribution  $\epsilon^{\text{Bulk}}$  can be related to a local velocity perturbation using the sensitivity kernel introduced by Pacheco et Snieder (2005) :

$$K(\mathbf{S}, \mathbf{R}, \mathbf{r}_0, t) = \frac{\int_0^t p(\mathbf{S}, \mathbf{r}_0, u) p(\mathbf{r}_0, \mathbf{R}, t - u) du}{p(\mathbf{S}, \mathbf{R}, t)} \quad (6.34)$$

where  $\mathbf{S}$  and  $\mathbf{R}$  are the positions of the source and the receiver,  $\mathbf{r}_0$  is the position of the local velocity variation, and  $t$  is the center of the time interval in the coda where the stretching is evaluated.  $p(\mathbf{a}, \mathbf{b}, t)$  is the intensity of the wave field from  $\mathbf{a}$  to  $\mathbf{b}$  at time  $t$ . An example of the sensitivity kernel is shown in Figure 6.6 at  $t=3.6$  s in the coda for a source and receiver inside the medium.

This sensitivity kernel is relevant in the multiple scattering regime, and it can be interpreted as the volumetric density of time that the scattered waves spend at  $\mathbf{r}_0$ . It can be noted that the total time  $t$  spent in the medium is retrieved by integrating the kernel over the volume of the studied medium :

$$t = \int_{\text{medium}} K(\mathbf{S}, \mathbf{R}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \quad (6.35)$$

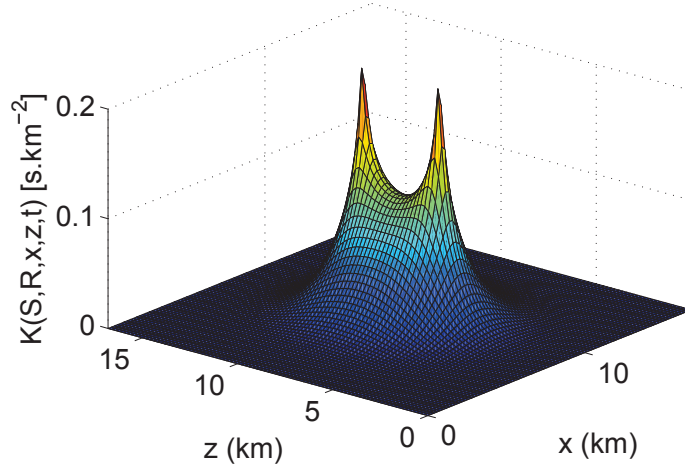


FIGURE 6.6 – Spatial representation of sensitivity kernel  $K(\mathbf{S}, \mathbf{R}, x, z, t)$  in the diffusion approximation at  $t=3.6$  s. The two peaks correspond to the positions of the source and receiver.

$$= \int_{x=0}^{x_{\max}} \int_{z=0}^{z_{\max}} K(\mathbf{S}, \mathbf{R}, x, z, t) dx dz,$$

where  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z$ . ( $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z$ ) are cartesian unit vectors.

For a local velocity variation  $\frac{dv}{v}$  in an elementary volume  $\Delta V$  centered on  $\mathbf{r}_0$ , the stretching coefficient  $\varepsilon^{\text{Bulk}}(\mathbf{r}_0, t)$  for signals emitted in  $\mathbf{S}$  and received in  $\mathbf{R}$  reads :

$$\varepsilon^{\text{Bulk}}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{K(\mathbf{S}, \mathbf{R}, \mathbf{r}_0, t)}{t} \frac{dv}{v} \Delta V. \quad (6.36)$$

In our numerical experiment, the velocity variation is applied to a layer of thickness  $h$  located at a depth  $d$ . As the velocity variation is weak, the measured stretching coefficient can be expressed as the spatial integral of the kernel on the medium, weighted by the applied velocity change :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\text{Bulk}}(d, t) &= \int_{\text{medium}} \frac{K(\mathbf{S}, \mathbf{R}, \mathbf{r}, t)}{t} \frac{dv}{v}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ &= \int_{x=0}^{x_{\max}} \int_{z=d}^{z=d+h} \frac{K(\mathbf{S}, \mathbf{R}, x, z, t)}{t} \frac{dv}{v} dx dz, \end{aligned} \quad (6.37)$$

with the velocity change  $\frac{dv}{v}(\mathbf{r}) = \frac{dv}{v}$  in the layer and  $\frac{dv}{v}(\mathbf{r}) = 0$  elsewhere.

**Intensity propagator in the diffusion approximation :** As a first approximation, we describe the intensity propagator in Equation (6.34) with the diffusion equation solution :

$$p(\mathbf{S}, \mathbf{R}, t) = \frac{1}{4\pi Dt} e^{-\frac{\|\mathbf{S}-\mathbf{R}\|^2}{4Dt}} \quad (6.38)$$

where  $D$  is the diffusion constant that depends on the medium heterogeneity. Equation (6.38) stands for 2D infinite media. To take the free surface into account, a semi-infinite space has to be considered. In this case, the solution is found in terms of the sum of the infinite medium solution and its mirror image from the free surface. This solution can be easily computed and gives an analytical solution of the kernel (Equation (6.34)). Nevertheless, this kernel is only accurate when the diffusion approximation is valid : at times much greater than the transport mean free time  $t \gg t^*$ , where  $t^* = \ell^*/c$ , and for velocity variations located far away from the sensors.

**Intensity propagator for a radiative transfer approximation :** The radiative transfer equation allows for a more general representation of wave intensities in scattering media. In our case of weakly anisotropic scattering ( $\ell^* \approx \ell$ ), we assume that we can use the following exact solution (Sato, 1993; Paasschens, 1997), valid for 2D isotropic scattering :

$$\begin{aligned} p(r, t) = & \frac{e^{-ct/\ell}}{2\pi r} \delta(ct - r) \\ & + \frac{1}{2\pi \ell ct} \left(1 - \frac{r^2}{c^2 t^2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{[\ell^{-1}(\sqrt{c^2 t^2 - r^2} - ct)]} \Theta(ct - r), \end{aligned} \quad (6.39)$$

where  $c$  is the energy velocity,  $r$  is the distance between source and receiver,  $\ell$  is the scattering mean free path and  $\Theta(x)$  is the Heaviside (or step) function. The first term describes the coherent part of the intensity that decreases exponentially with the distance relative to the scattering mean free path. The second term describes the diffuse intensity. We note that the diffusion solution is reached when  $t \gg r/c$ .

**Bulk sensitivity kernel in an infinite medium :** As the next step, we want to see how well the diffusion or radiative transfer approach models the bulk sensitivity of our data. For this purpose, we study the bulk waves without influence of the surface waves. Therefore we slightly change the configuration of our numerical simulations. We place the source and the horizontal receiver array within the medium at a depth of 8.8 km, and take absorbing conditions at all four boundaries. With this configuration, we would not expect any surface waves to appear on our record, and so the apparent relative velocity changes should only be governed by the 2D propagation of bulk waves.

The resulting apparent relative velocity changes  $\varepsilon^{\text{obs}}(d, t = 3.6 \text{ s})$  are shown in blue in Figure 6.7, versus the depth of the perturbed layer for a heterogeneity of  $\sigma = 20\%$ . The error bars indicate the standard deviation over 10 models. We also plot  $\varepsilon^{\text{Bulk}}$  from the diffusion-based kernel in black and from the radiative-transfer-based kernel in red (Figure 6.7). As expected, the main difference between the diffusion and radiative transfer approach is visible for shallow depths of the perturbed layer ; i.e., when the time until visiting the layer is small. For long distances, the difference between the two approaches

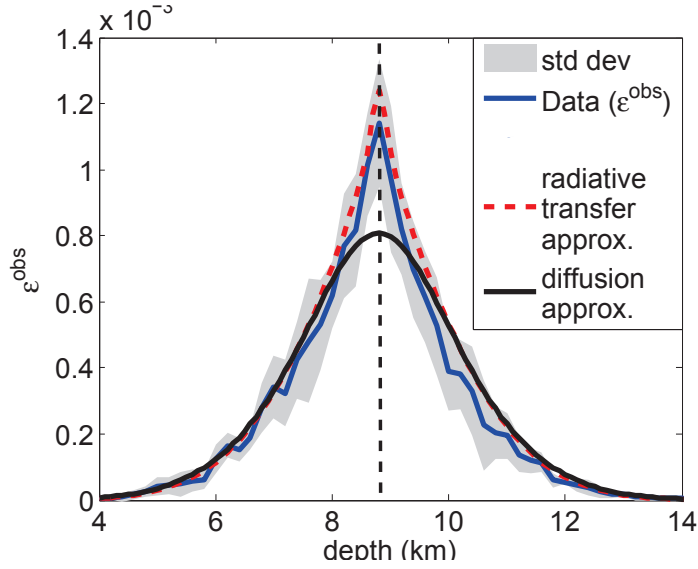


FIGURE 6.7 – Apparent relative velocity changes  $\varepsilon^{\text{obs}}(d, t = 3.6 \text{ s})$  versus depth of the perturbed layer for bulk waves in an infinite medium with  $\sigma = 20\%$ . The black line shows  $\varepsilon^{\text{Bulk}}$  in the diffusion approximation and the dashed red line shows  $\varepsilon^{\text{Bulk}}$  in the radiative transfer approximation. The vertical broken black line marks the positions of the source and the receivers.

is negligible : both of the approaches fit the data very well at large distances from the source. For distances smaller than one scattering mean free path, the diffusion equation is not valid yet, and it underestimates the expected apparent relative velocity changes. This problem is solved by the radiative transfer approach, which is accurate at short times. We will therefore take the radiative transfer approach to model the depth sensitivity. We emphasize that  $\varepsilon^{\text{Bulk}}$  from the radiative transfer in Figure 6.7 directly fits the data (no free parameters). The small discrepancies between the observation and model might be a result of the effective diffusivity that we used in the model, as we cannot measure the scattering mean free path for P-waves and S-waves separately (Turner, 1998).

#### 6.2.4 Model for the depth sensitivity

To obtain a theoretical model  $\varepsilon^{\text{theo}}(d, t)$  that describes the coda-wave sensitivity at depths, according to Equation (6.33), we now combine the surface wave part and the bulk part. For the bulk regime, we apply the radiative transfer approach. Figure 6.4 shows the depth sensitivity averaged over 10 models with  $\sigma = 20\%$  velocity fluctuations. The source and receivers are placed at the free surface. The time window in the coda was centered around 3.6 s. With the minimum mean-square error criterion, we search the partition coefficients  $\alpha$  for the surface waves and  $1 - \alpha$  for the bulk waves, that optimize the fit of the depth sensitivity from the numerical simulations. In this case, the best fit to the experimental slope is obtained with a partition ratio of 1/4 for surface to bulk waves ( $\alpha=0.25$ ). The ratio between the coefficients implies that the waves spent more

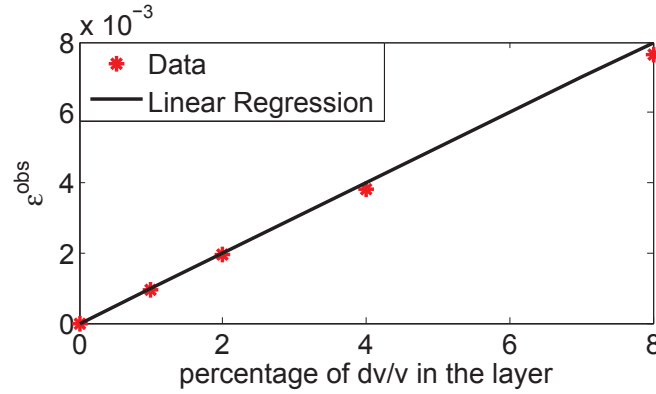


FIGURE 6.8 – Apparent relative velocity changes  $\epsilon^{\text{obs}}(d, t = 3.6 \text{ s})$  versus the degree of perturbation in the layer. The layer is at 500 m in depth, and the receiver in the immediate vicinity of the source.

time as bulk-waves than as surface waves. As we can see in Figure 6.4, the proposed model gives an excellent fit. The zoom at small distances indicates the need to consider surface waves in the model. In black, we see the fit using the sensitivity of bulk waves only (Figure 6.4). The steep slope over short distances is due to the rapidly vanishing sensitivity of the surface waves versus the depth.

According to Equation (6.36), which is written for weak velocity changes, the observed apparent relative velocity changes  $\epsilon^{\text{obs}}$  depend linearly on the velocity changes  $\frac{dv}{v}$  introduced in the perturbed layer. This is shown in Figure 6.8, where the apparent relative velocity changes at a receiver at close distance from the source are computed. The perturbed layer is at 500 m in depth, and its velocity is successively increased by 1%, 2%, 4% and 8%.

In the following, we now look at the behavior of the depth sensitivity and the evolution of the partition coefficient  $\alpha$  by considering :

- different levels of heterogeneity ( $\sigma$ ) in the model.
- different time windows in the coda.

### Different degrees of heterogeneity

In this section, we report on the results of the simulations with different levels of heterogeneity. To that end, we repeat the same types of simulations as described in section 6.2.2, using a free surface and three absorbing boundary conditions. We use velocity fluctuations of  $\sigma=5\%$ ,  $10\%$ ,  $15\%$ ,  $20\%$  and  $30\%$  for the random elastic medium. In Figure 6.9, we look at the apparent relative velocity changes  $\epsilon^{\text{obs}}(d, t = 3.6 \text{ s})$  averaged over ten models versus the degree of heterogeneity for three depth positions of the layer (200, 1000, 2000 m). We see clearly that waves traveling in media with little heterogeneity ( $\sigma = 5\%$ ) are hardly sensitive to perturbations at depth, even to perturbations at 200 m

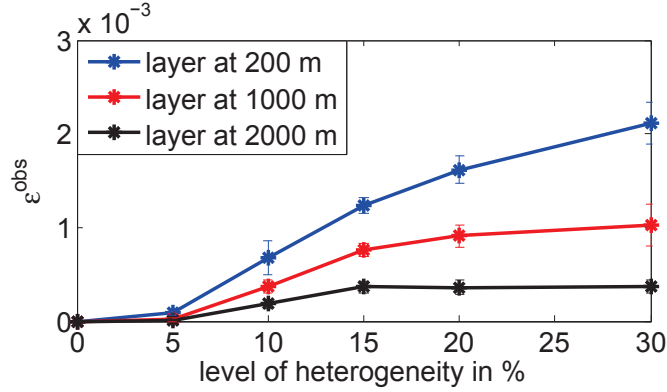


FIGURE 6.9 – Depth sensitivity  $\varepsilon^{\text{obs}}(d, t = 3.6 \text{ s})$  computed for different levels of heterogeneity towards changes occurring at 200, 1000 and 2000 m in depth.

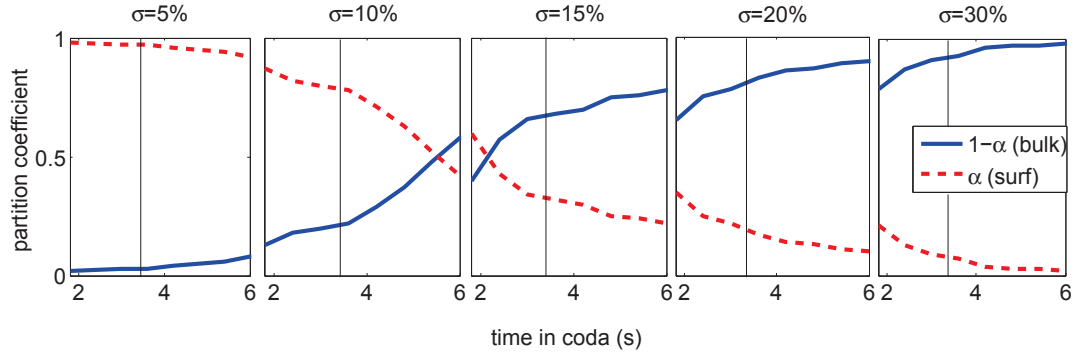


FIGURE 6.10 – Evolution of the partition coefficients with time in the coda for models with degrees of heterogeneity ranging from 5% to 30%. In dashed red, the partition coefficient  $\alpha$  for the surface-wave sensitivity, and in blue,  $1 - \alpha$  for the bulk-wave sensitivity. The black vertical lines mark the processed times at  $t=3.6 \text{ s}$ .

depth only. The medium is not heterogeneous enough to cause significant conversion from Rayleigh to bulk waves, and vice versa. Therefore, the depth sensitivity is dominated by surface waves and limited to their penetration depth. When the medium becomes more heterogeneous ( $\geq 10\%$ ), the bulk waves start to have an important role, and the coda waves become sensitive to changes at greater depths. This is even more emphasized in very heterogeneous medium (20%-30%), where an important apparent relative velocity change  $\varepsilon^{\text{obs}}$  is obtained for changes at greater depth. Such heterogeneous regimes are dominated by bulk waves.

This behavior can also be seen in Figure 6.10, where we report on the evolution of the partition coefficient  $\alpha$  for surface waves and  $1 - \alpha$  for bulk waves with time in the coda, for models with degrees of heterogeneity ranging from 5% to 30%. At the moment, we focus only on values at 3.6 s, marked by black vertical lines in Figure 6.10, and discuss the time dependence in section 6.2.4. Consistent with the previous observations, in media

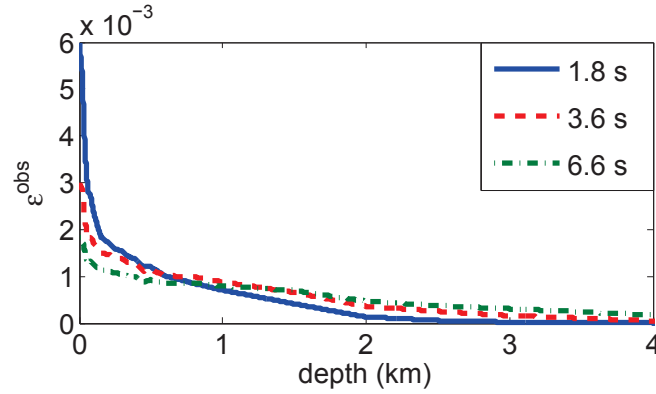


FIGURE 6.11 – Depth sensitivity computed at different times in the coda for  $\sigma = 20\%$ . Note the importance of the surface-wave sensitivity for early times in the coda.

with heterogeneities of only 5%, the partition coefficient for surface waves is at  $\alpha=0.97$ . In media with heterogeneities of 10%,  $\alpha = 0.8$ . In media with  $\sigma = 15\%$ , we observe that  $\alpha = 0.32$ . For strongly heterogeneous media, bulk waves clearly dominate over surface waves with  $\alpha = 0.17$  for  $\sigma = 20\%$  and  $\alpha = 0.1$  for  $\sigma = 30\%$ .

At this lapse time ( $t=3.6$  s), the depth sensitivity is limited to the penetration depth of surface waves for weakly heterogeneous media, while in media with an increased amount of heterogeneity body waves play an prominent role.

### Different times in the coda

In this section, we study the depth sensitivity at different times in the coda. To this end, we calculate the apparent relative velocity changes in different time windows in the coda, scanning a range from 1.8 s to 6.6 s. Figure 6.11 shows the results for a model with velocity variations of  $\sigma = 20\%$  at three different times (1.8, 3.6 and 6.6 s). The importance of surface waves at shallow depths for early times in the coda is seen clearly. At later times in the coda, the bulk waves become increasingly important.

To have a more quantitative approach, we can study the evolution of the partition coefficients with time in the coda, as shown in Figure 6.10 for different heterogeneities. For media with heterogeneities of  $\sigma = 5\%$ , surface waves dominate bulk waves at all times in the coda. For media with heterogeneities of  $\sigma = 10\%$ , there is a crossing of  $\alpha$  and  $1 - \alpha$  at 5.4 s. Afterwards the sensitivity of the bulk waves is greater than that of the surface waves. Media with heterogeneities of  $\sigma = 15\%$  also show the crossing from surface-wave dominance to bulk-wave dominance, although much earlier, at about 2.1 s, which indicates that due to the increased amount of scattering there have been much more surface wave to bulk wave conversions at an early time in the coda. At later times,  $\alpha$  appears to stabilize. For strongly heterogeneous media with  $\sigma = 20\%$ , and  $\sigma = 30\%$ , bulk waves dominate surface waves at all times in the coda. We observe a continuous slow decrease for  $\alpha$  in the case of  $\sigma = 20\%$  and for early times in  $\sigma = 30\%$ . For times



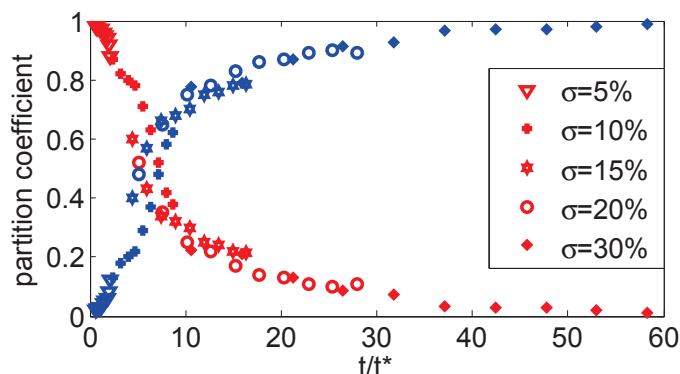


FIGURE 6.12 – Evolution of the partition coefficients for different degrees of heterogeneity in the medium ranging from 5% to 30%. The time axis has been normalized by the transport mean free time  $t^* = \ell^*/c$ . In red the partition coefficients  $\alpha$  for the surface-wave sensitivity, and in blue  $1 - \alpha$  for the bulk-wave sensitivity. The surface waves dominate for the first six mean free times.

after 4 s in the case of  $\sigma = 30\%$ , the bulk wave to surface wave contribution is stabilized with a marginal contribution of surface waves.

Looking at the ensemble of subplots in Figure 6.10, the evolution of the partition coefficients for different heterogeneities appears to be complementary. To prove this, we normalize the time axis by the transport mean free time  $t^* = \ell^*/c$  and plot the partition coefficients against the new, dimensionless axis  $t/t^*$ . The result is shown in Figure 6.12 for all heterogeneities. The crossing point of the partition coefficients for surface waves and bulk waves coincides quite well for all of the different heterogeneities. The surface waves dominate the depth sensitivity for about six mean free times. For later times, the bulk waves dominate.

A very interesting aspect that emerges from the time dependence in the coda is that we can discriminate a change that occurs at the surface from a change that occurs at depth by only looking at the shape of the apparent relative velocity changes  $\varepsilon^{\text{obs}}$  only. Figure 6.13 shows  $\varepsilon^{\text{obs}}$  versus the time in the coda : A) for very shallow positions of the perturbed layer (20 m), and B) for profound depths (1500 m) of the layer. For perturbations at shallow depth, the surface waves have an important role in the depth sensitivity of the coda waves. Their contribution is high at early times in the coda and decreases at later times. This is what we see as a decay in  $\varepsilon^{\text{obs}}$  on Figure 6.13A. For perturbations at greater depth, the contribution of the surface waves to the depth sensitivity of the coda waves is negligible. Bulk waves have an important role here. At late times in the coda, the time increases that bulk waves have spent on average at greater depth, sampling the area more densely. The depth sensitivity consequently increases with time in the coda. This is why there is an increase in the apparent relative velocity changes  $\varepsilon^{\text{obs}}$  in Figure 6.13B.

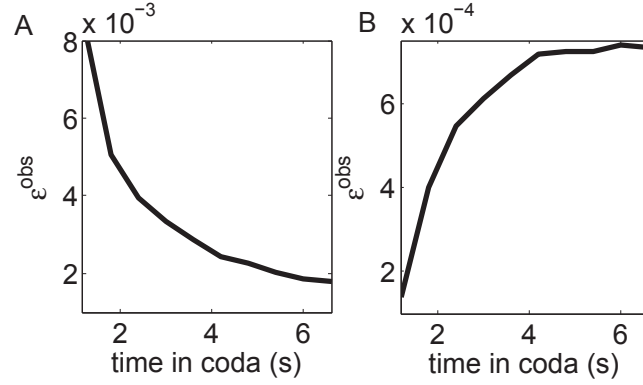


FIGURE 6.13 – Apparent relative velocity changes  $\varepsilon^{\text{obs}}$  versus time in the coda. A. for a layer at shallow depth (20 m) and B. for a layer at great depth (1500 m).

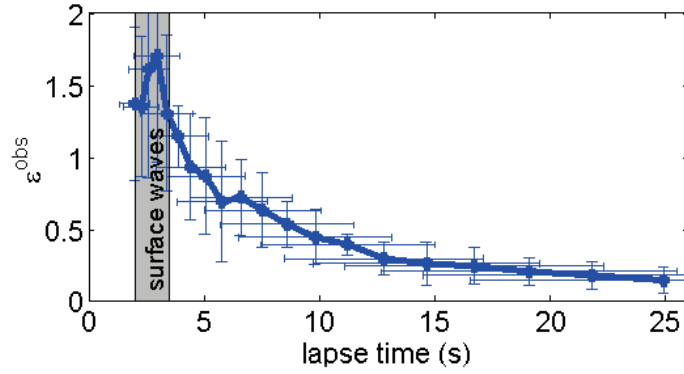


FIGURE 6.14 – Relative amplitude of the apparent relative velocity changes computed for the lunar data. Velocity changes at the moon are limited to the shallow subsurface and verify the prediction about the decrease in the lapse with time, as illustrated in Figure 6.13 for the apparent relative velocity changes at shallow depths.

### Practical application for shallow depth

To demonstrate the practical relevance of the findings in this study, we re-visit the investigations of Sens-Schönfelder et Larose (2008, 2010), who analyzed the data from the Lunar Passive Seismic Experiment of the Apollo 17 mission. Similar to many datasets on Earth the ambient noise recorded during the Apollo era has been analyzed with the principles of seismic interferometry to obtain Green's functions between stations by correlation of the ambient noise field. Though the lunar seismic noise has different origin and the subsurface structure differs notably from Earth, the Green's functions exhibit a surface wave part that was used by Larose *et al.* (2005a) to image the subsurface. The coda part of the Green's functions was investigated by Sens-Schönfelder et Larose (2008) to measure the apparent velocity variation in the lunar subsurface over a period of eight day-night cycles on the Moon (about eight months).

The Green's functions obtained from the Apollo data thus have similar properties as their counterparts on Earth and the signals in the numerical simulation in this study. Interestingly the environmental conditions on the Moon affecting the subsurface velocities are much better known than on Earth because of absent tectonics and atmosphere. This renders the dataset ideal to illustrate the concepts developed in this article.

We construct daily cross correlation functions (CCF) between the six possible sensor pairs by correlating all available 24 hours segments of lunar noise. Apparent relative velocity changes were estimated in different time windows of the CCFs with the stretching technique (section 6.2.2) in comparison to a reference trace obtained by averaging all daily CCFs for each pair. Velocity variations show a periodicity of one month and were modeled as the consequence of temperature variations induced by the solar irradiation with its day and night cycle.

Thanks to this well controlled surface process that limits velocity changes to the shallow subsurface we can verify the predictions about the lapse time dependence of the apparent velocity change illustrated in Figure 6.13 with real seismic data. Measured in different time windows the apparent velocity curves are merely identical and differ only in their amplitude. Figure 6.14 shows the lapse time dependent factor that scales the amplitudes of the apparent relative velocity variations obtained from different lapse times windows. After the passage of the ballistic surface wave train associated with the maximum of the apparent velocity change we observe a decrease with increasing lapse time. This is exactly the predicted behavior for a near surface velocity perturbation because of the transition from surface wave sensitivity at early times to bulk wave sensitivity at later times as illustrated in Figure 6.13.

### 6.2.5 Conclusion

In this study, we investigated the depth sensitivity of coda waves to velocity perturbations at depth. We have presented the results from numerical wave-field simulations in media with different degrees of heterogeneity that contain a layer with perturbed velocities. We measured the apparent relative velocity changes due to the velocity perturbations at different depths. Analyses were conducted for different degrees of heterogeneity in the model, different percentages of velocity change within the layer, and different times in the coda :

1. we can relate the depth sensitivity of coda waves to a combination of bulk-wave sensitivity and surface-wave sensitivity as described in Equation (6.33).
2. changes at depth can be detected even if the sources and sensors are placed at the free surface, due to the scattering phenomena that mix surface waves and bulk waves, given a sufficiently heterogeneous medium.
3. from the time dependence of the relative velocity change in the coda, we can discriminate a change that occurs at the surface from a change that occurs at depth (Figure 6.13).

4. as illustrated in Figure 6.8, the apparent relative velocity changes increase linearly with the amplitude of the perturbation.
5. in Figure 6.10 and 6.12, we demonstrate the universal behavior of the partition ratio versus the time in the coda normalized by the scattering mean free time.

We have seen that the depth sensitivity of the coda waves depends on :

- the level of heterogeneity in the model,
- the lapse time in the coda,
- the degree of velocity perturbation,
- the depth position of the change.
- the source-receiver distance

The sensitivity kernel depends on the offset between source and receiver, nevertheless, in our geometry the sensitivity towards offsets is weak and has therefore not been addressed in more detail.

Frequency plays a crucial role in the value of the mean free time and therefore in the partition ratio of surface and bulk waves. Depending on the frequency band considered, the interpretation of velocity change measurements can be interpreted as the sensitivity of either body waves (Sens-Schönfelder et Wegler (2006), working at 0.5 Hz and above) or sensitivity of surface waves (Rivet *et al.* (2011), working at 0.2 Hz and below and at very early times in the coda).

An interesting observation is the importance of surface waves for shallow depth and at early times in the coda. After six mean free times, the bulk waves clearly dominate the depth sensitivity. As a general framework, we can say that at early times, the waves most probably propagate as surface waves, and are sensitive to shallow changes. Later on the coda, scattering and mode conversions have occurred and the waves sensed at the surface have spent more time in the bulk, they are therefore more sensitive to changes at depth. In any case, the observed apparent velocity change  $\varepsilon^{\text{obs}}$  is weaker than the actual local velocity change  $\frac{dv}{v}$ .

These results are of interest to improve future monitoring techniques using coda waves. The results will be used, for instance, to improve the inversion schemes on real data, including the imaging and locating of small changes that occur in fault zones or volcanic areas.



## Troisième partie

### Imagerie : Le problème inverse



# Chapitre 7

## Localiser un changement unique

Dans la partie précédente du manuscrit, nous avons caractérisé le problème direct, qui correspond à l'étude des perturbations de la coda associées à l'introduction d'un changement local dans le milieu. Nous avons imposé la force et la position du changement et nous avons observé et modélisé la décorrélation (chapitre 5) ou la variation de temps d'arrivée (chapitre 6) des ondes diffuses.

Dans cette dernière partie, nous adoptons le cheminement inverse en partant des mesures pour essayer d'inférer les caractéristiques du changement survenu dans le milieu (section efficace, position). Pour résoudre ce problème inverse, nous utilisons d'une part des données issues de simulations en différences finies (2D acoustiques) et d'autre part des données expérimentales issues d'acquisitions ultrasonores dans des éléments en béton.

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode d'inversion destinée à imager un changement local et unique dans le milieu et nous en montrons les limites. Dans le chapitre 8 suivant, nous illustrerons la nécessité de développer un algorithme d'inversion plus robuste à travers une expérience « réaliste » effectuée sur un bloc de béton de 15 tonnes. Nous introduirons pour finir un schéma d'inversion matriciel au sens des moindres carrés. Ce schéma sera appliqué aux simulations pour inverser plusieurs changements locaux simultanés.

### 7.1 Méthode d'inversion

Le cas idéal d'un changement local et unique a été étudié analytiquement et numériquement dans les chapitres 5 et 6. Ce changement est représenté par l'apparition d'un diffuseur supplémentaire dans le milieu entre deux dates  $d_0$  et  $d_1$ . Dans le cas général que nous avons nommé changement de « structure », ce diffuseur est seulement caractérisé par sa section efficace de diffusion  $\sigma$ . On note qu'il peut correspondre en pratique à toute sorte de forte variation locale des propriétés mécaniques d'un milieu hétérogène.

Notons  $\phi_i^{d_0}(t)$  la réponse impulsionnelle enregistrée avec la paire de capteur  $i$  ( $S_i$  et  $R_i$ ) à la date  $d_0$  et  $\phi_i^{d_1}(t)$  celle enregistrée à la date  $d_1$ . Comme étudié précédem-



ment, nous pouvons mesurer la « force » de ce changement en calculant la décorrélation expérimentale  $DC_i^{\text{Exp}}$  entre  $\phi_i^{d_0}$  et  $\phi_i^{d_1}$  :

$$DC_i^{\text{Exp}}(t) = 1 - \frac{\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \phi_i^{d_0}(t') \phi_i^{d_1}(t') dt'}{\sqrt{\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \phi_i^{d_0}(t')^2 dt' \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \phi_i^{d_1}(t')^2 dt'}} \quad (7.1)$$

La décorrélation est normalisée et calculée dans une fenêtre de largeur  $T$  centrée sur le temps  $t$  dans la coda. Nous avons montré au cours du chapitre 5 que les dépendances spatio-temporelles de cette décorrélation étaient correctement prédites à l'aide du Noyau (5.29) :

$$K(\mathbf{S}, \mathbf{R}, \mathbf{r}, t) = \frac{\int_0^t I(\mathbf{S}, \mathbf{r}, u) I(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t - u) du}{I(\mathbf{S}, \mathbf{R}, t)} \quad (7.2)$$

où  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{R}$  dénotent la position de la source et du récepteur,  $\mathbf{r}$  la position du changement local et  $t$  le temps dans la coda.  $I(\mathbf{a}, \mathbf{b}, t)$  représente le propagateur de l'intensité du point  $\mathbf{a}$  au point  $\mathbf{b}$  au temps  $t$ . Nous rappelons que la décorrélation théorique  $DC_i^{\text{Th}}(\mathbf{r}, t)$  s'exprime directement à partir de ce noyau :

$$DC_i^{\text{Th}}(\mathbf{r}, t) = \frac{c\sigma}{2} K_i(\mathbf{r}, t) \quad (7.3)$$

où  $\mathbf{r}$  et  $\sigma$  représentent la position et la section efficace du changement et où  $c$  dénote la vitesse des ondes. La décorrélation et le noyau dépendent implicitement des positions des capteurs ( $\mathbf{S}_i$  et  $\mathbf{R}_i$ ) à travers l'indice  $i$ .

En utilisant une combinaison de sources et de récepteurs, on imagine maintenant la possibilité de remonter à la position  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  du changement, ainsi qu'à sa section efficace  $\sigma = \sigma_0$ . En utilisant  $N$  paires de capteurs, on peut par exemple chercher par essais-erreurs successifs, le couple  $\{\mathbf{r}_0, \sigma_0\}$  qui minimise le désaccord entre les décorrélations mesurées  $DC_i^{\text{Exp}}$  et théoriques  $DC_i^{\text{Th}}$ .

### 7.1.1 Test du $\chi^2$

Nous proposons pour cela de construire une fonction de désaccord (ou fonction de coût) au sens des moindres carrés. Nous choisissons la fonction test du  $\chi^2$ , couramment utilisée en statistique (Press *et al.*, 2007) :

$$\begin{aligned} \chi^2(\mathbf{r}, \sigma) &= \sum_{i=1}^N \frac{(DC_i^{\text{Th}}(\mathbf{r}) - DC_i^{\text{Exp}})^2}{N\epsilon^2} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{(\frac{c\sigma}{2} K_i^{\text{Th}}(\mathbf{r}) - DC_i^{\text{Exp}})^2}{N\epsilon^2} \end{aligned} \quad (7.4)$$

avec  $\epsilon$  une estimation de l'erreur de mesure. Les différentes fonctions sont implicitement évaluées au temps  $t$  dans la coda. Il est bien sûr possible d'utiliser différents temps, et la fonction  $\chi^2$  s'obtient alors en sommant également sur ces différentes mesures.

La fonction  $\chi^2$  dépend pour l'instant explicitement des deux inconnues  $\{\mathbf{r}, \sigma\}$ . Nous montrons maintenant comment rendre implicite la dépendance en  $\sigma$  et simplifier ainsi l'inversion.

Soit  $\sigma^{\text{Hyp}}(\mathbf{r})$  la section efficace hypothétique du changement, si celui-ci avait eu lieu en  $\mathbf{r}$ . La valeur de  $\sigma^{\text{Hyp}}(\mathbf{r})$  correspond à celle minimisant le  $\chi^2$  au point  $\mathbf{r}$ . Soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^2(\mathbf{r}, \sigma)}{\partial \sigma} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sigma^{\text{Hyp}}(\mathbf{r}) &= \frac{2 \sum_{i=1}^N K_i^{\text{Th}}(\mathbf{r}) DC_i^{\text{Exp}}}{\sum_{i=1}^N K_i^{\text{Th}}(\mathbf{r})^2} \end{aligned} \quad (7.5)$$

en remarquant que le  $\chi^2$  s'exprime comme un polynôme du second degré en  $\sigma$ . Le  $\chi^2$  peut maintenant s'exprimer en fonction de  $\sigma^{\text{Hyp}}(\mathbf{r})$  et ne dépend plus que de la position hypothétique  $\mathbf{r}$  du défaut :

$$\chi^2(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{(\frac{c}{2} \sigma^{\text{Hyp}}(\mathbf{r}) K_i^{\text{Th}}(\mathbf{r}) - DC_i^{\text{Exp}})^2}{N \epsilon^2} \quad (7.6)$$

où  $\sigma^{\text{Hyp}}(\mathbf{r})$  est donnée par l'équation (7.5). La position la plus vraisemblable du changement, notée  $\mathbf{r}_0$ , est celle qui minimise la valeur du  $\chi^2(\mathbf{r})$ , et sa section efficace vaut alors  $\sigma_0 = \sigma^{\text{Hyp}}(\mathbf{r}_0)$ .

Si l'on a correctement estimé l'erreur  $\epsilon$ , les positions telles que  $\chi^2 \leq 1$  sont des positions pour lesquelles le désaccord entre les valeurs expérimentales et le modèle théorique est de l'ordre de l'erreur de mesure. Cette zone correspond à une zone de confiance, dans laquelle le changement s'est vraisemblablement produit.

### 7.1.2 Inférence bayésienne et carte de probabilité

Il est également possible de calculer la carte de densité de probabilité d'apparition de ce défaut unique. On utilise pour cela l'inférence bayésienne et l'on montre le lien existant entre probabilité et fonction  $\chi^2$ . On suppose toujours que le changement est local et qu'il se produit en un point  $\mathbf{r}_0$ . On suppose également que chaque paire  $i$  de capteurs apporte une information indépendante et que les décorrélatons mesurées  $DC_i^{\text{Exp}}$  sont des variables aléatoires qui suivent une loi gaussienne centrée sur la valeur théorique  $DC_i^{\text{Th}}$ , et de variance  $\epsilon^2$ , l'erreur de mesure :

$$p(DC_i^{\text{Exp}} | \mathbf{r}_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon^2}} e^{-\frac{(DC_i^{\text{Exp}} - DC_i^{\text{Th}}(\mathbf{r}_0))^2}{2\epsilon^2}} \quad (7.7)$$

où  $p(a|b)$  représente la probabilité conditionnelle de «  $a$  sachant  $b$  ». On décrit donc la probabilité de mesurer  $DC_i^{\text{Exp}}$  connaissant la position du changement  $\mathbf{r}_0$  comme une gaussienne centrée sur  $DC_i^{\text{Th}}(\mathbf{r}_0)$  et de variance  $\epsilon^2$ .

Nous cherchons à calculer la probabilité de l'apparition du défaut en  $\mathbf{r}_0$  connaissant l'ensemble des décorrélations  $DC_i^{\text{Exp}}$  mesurées par les  $N$  paires de capteurs, c'est à dire  $p(\mathbf{r}_0|\{DC_i^{\text{Exp}}\}_{i=1,N})$ . Soit  $p_n(\mathbf{r})$  la densité de probabilité du changement connaissant les  $n$  premières mesures. Avant la première mesure, n'ayant aucune information sur la position du changement, la densité de probabilité vaut  $p_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{V}$ . La probabilité à priori est uniforme sur le volume  $V$  du milieu. Le principe de l'inférence bayésienne consiste à calculer récursivement ces densités de probabilité, en incluant tour à tour l'information apportée par la nouvelle mesure. Le théorème de Bayes nous permet d'établir les relations suivantes :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r} \cap DC_n | DC_{n-1} \cap DC_{n-2} \cap \dots \cap DC_1) &= \frac{p(\mathbf{r} \cap DC_n \cap DC_{n-1} \cap \dots \cap DC_1)}{p(DC_{n-1} \cap DC_{n-2} \cap \dots \cap DC_1)} \\ &= p(\mathbf{r} | DC_n \cap DC_{n-1} \cap \dots \cap DC_1) p(DC_n) \\ &= p_n(\mathbf{r}) p(DC_n) \end{aligned} \quad (7.8)$$

et similairement :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r} \cap DC_n | DC_{n-1} \cap DC_{n-2} \cap \dots \cap DC_1) &= \frac{p(\mathbf{r} \cap DC_n \cap DC_{n-1} \cap \dots \cap DC_1)}{p(DC_{n-1} \cap DC_{n-2} \cap \dots \cap DC_1)} \\ &= p(DC_n | \mathbf{r} \cap DC_{n-1} \cap DC_{n-2} \cap \dots \cap DC_1) \\ &\times \frac{p(\mathbf{r} \cap DC_{n-1} \cap DC_{n-2} \cap \dots \cap DC_1)}{p(DC_{n-1} \cap DC_{n-2} \cap \dots \cap DC_1)} \\ &= p(DC_n | \mathbf{r}) p_{n-1}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (7.9)$$

en utilisant l'indépendance des mesures expérimentales  $DC_i$ . On note que l'exposant Exp est omis pour plus de lisibilité. En intégrant (7.8) sur tout le volume, on obtient :

$$\int_V p_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \cdot p(DC_n) = \int_V p(\mathbf{r} \cap DC_n | DC_{n-1} \cap DC_{n-1} \cap \dots \cap DC_1) d\mathbf{r} \quad (7.10)$$

L'intégrale sur le volume de  $p_n$  valant 1, on peut utiliser (7.8) et (7.9) pour obtenir la relation de récurrence suivante :

$$p_n(\mathbf{r}) = \frac{p(DC_n | \mathbf{r}) p_{n-1}(\mathbf{r})}{\int_V p(DC_n | \mathbf{r}) p_{n-1}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}} \quad (7.11)$$

On peut alors montrer que la densité de probabilité connaissant les  $N$  mesures s'écrit :

$$p_N(\mathbf{r}) = \frac{\prod_{i=1}^N p(DC_i^{\text{Exp}}|\mathbf{r})}{\int_V \prod_{i=1}^N p(DC_i^{\text{Exp}}|\mathbf{r}) d\mathbf{r}} \quad (7.12)$$

Pour finir, remplaçons l'expression de la probabilité de mesure (7.7) dans (7.12) :

$$\begin{aligned} p_N(\mathbf{r}) &= \frac{1}{C} e^{-\frac{1}{2\epsilon^2} \sum_{i=1}^N (DC_i^{\text{Exp}} - DC_i^{\text{Th}}(\mathbf{r}))^2} \\ &= \frac{1}{C} e^{-N\chi^2(\mathbf{r})} \end{aligned} \quad (7.13)$$

où la constante de normalisation vaut  $C = \int_V e^{-N\chi^2(\mathbf{r})} d\mathbf{r}$ . En supposant des distributions gaussiennes de probabilités, nous avons donc montré que la densité de probabilité du changement dépend directement de la fonction coût  $\chi^2(\mathbf{r})$ .

Dans la section suivante 7.2, nous appliquons la méthode du  $\chi^2$  aux simulations numériques en différences finies. Nous donnons également un exemple de calcul de carte de probabilité du changement. Puis, dans la section 7.3, nous présentons une application expérimentale de la méthode.

## 7.2 Application du $\chi^2$ aux simulations numériques

Comme dans le chapitre 5, nous étudions un milieu carré à bords réfléchissants de largeur  $20\ell^*$  rempli de diffuseurs mous et ponctuels (1 point de grille). Nous répartissons 10 capteurs dans le milieu qui peuvent tour à tour jouer un rôle de source ou de récepteur. On peut donc compter 45 paires distinctes de capteurs ( $10 \times 9/2$ ). Une représentation schématique du milieu est visible en Figure 7.1.

Deux séries d'acquisitions de réponses impulsionnelles sont effectuées, une à la date initiale  $d_0$  et une à la date finale  $d_1$ . Entre ces deux dates, un nouveau diffuseur mou de rayon  $r_s$  est ajouté à une position aléatoire  $\mathbf{r}_0$ . C'est ce nouveau diffuseur qui constitue ici le défaut (ou changement local) à imager.

Nous utilisons les mêmes paramètres que ceux définis à la section 5.3.1, et nous rappelons quelques valeurs importantes. La source est une impulsion gaussienne de fréquence centrale 2MHz et de bande passante 30%. La longueur d'onde centrale vaut  $\lambda_c = 0.75\text{mm}$  et la vitesse des ondes est fixée à  $c = 1.5\text{mm}/\mu\text{s}$ . Le libre parcours moyen vaut  $\ell = \ell^* = 10\lambda_c = 7.5\text{mm}$ . Le pas spatial de la grille vaut 0.05mm et le pas temporel 0.0236 $\mu\text{s}$ . La durée d'acquisition est fixée à  $t_{\text{max}} = 1\text{ms}$ .

Les réponses enregistrées par la paire de capteurs  $i$  sont notées  $\phi_i^{d_0}(t)$  à la date initiale  $d_0$  et  $\phi_i^{d_1}(t)$  à la date finale  $d_1$ . Les mesures de décorrélation entre les réponses initiales et finales sont effectuées pour chaque couple de capteurs et à différents temps dans la coda selon l'équation (7.1). La réponse impulsionnelle du couple de capteurs 4-10 ainsi que les 15 temps centraux de mesure sont représentés à la Figure 7.2.

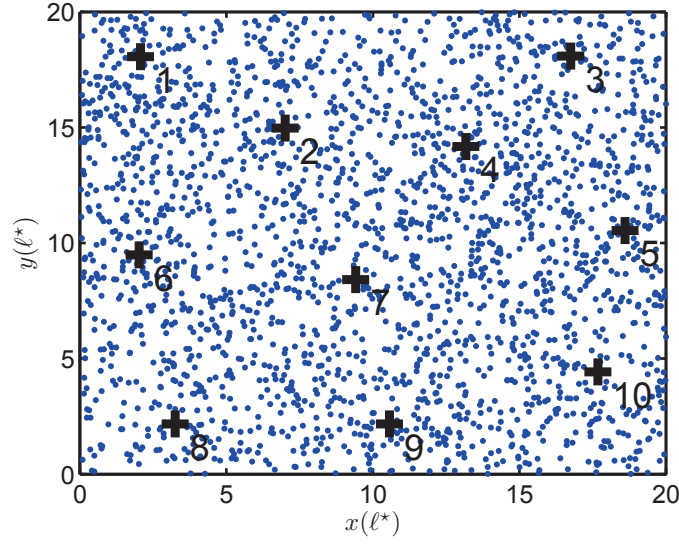


FIGURE 7.1 – Représentation schématique du milieu simulé. Les positions des capteurs sont marquées par des croix et un sous ensemble des diffuseurs par des disques. Les distances sont exprimées en nombre de libre parcours moyen de transport  $\ell^*$ .

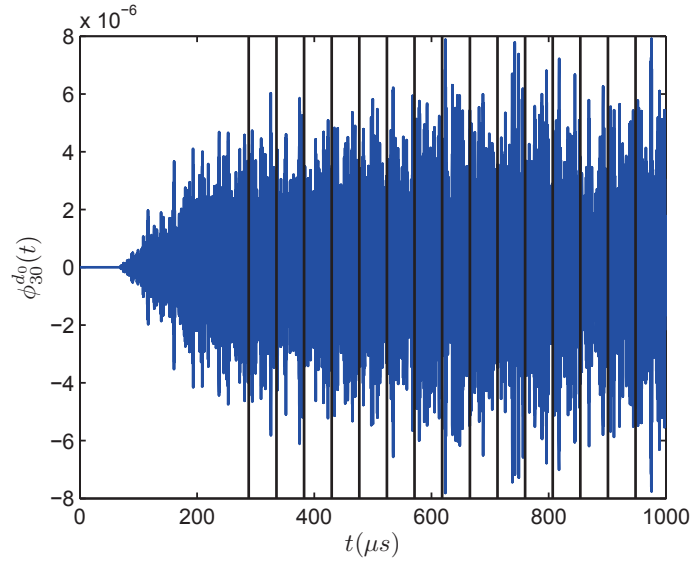


FIGURE 7.2 – Réponse impulsionnelle du couple de capteurs 4-10 dans le milieu initial (date  $d_0$ ). Les différents temps centraux pour lesquels sont effectuées les mesures de décorrélation sont marqués par les lignes noires verticales.

D'autre part, le modèle numérique, basé sur le noyau de sensibilité introduit au chapitre 5 est construit selon le protocole suivant :

- découpage du milieu en une grille de résolution souhaitée. Chaque nœud de la grille représente une position hypothétique du défaut. Dans le cas présent, le pas spatial

de cette grille vaut  $\approx \ell^*/4$ .

- calcul du propagateur de l'intensité pour chaque capteur vers chaque nœud de grille dans l'approximation choisie. Nous utilisons ici la superposition de la solution de la diffusion en milieu infini 2D et des images miroirs pour la prise en compte des bords réfléchissants.
- calcul du noyau en appliquant la formule (7.2), pour chaque paire de capteurs, chaque nœud de grille et chaque temps de mesure dans la coda.

Selon la configuration choisie et la résolution souhaitée, le calcul du modèle numérique peut prendre de quelques minutes à quelques heures sur un ordinateur de bureau<sup>1</sup>. On note que cette opération n'est à effectuer qu'une seule fois pour une configuration expérimentale donnée.

Une représentation du noyau associé au couple de capteurs 4-10 est visible sur la Figure 7.3 à deux temps différents de la coda. On peut noter sur cette Figure l'augmentation de la sensibilité autour du capteur situé proche du bord du domaine. On note également que la zone investiguée, bien que beaucoup plus large au temps long, garde encore une forte dépendance spatiale. La nature lente du processus diffusif rend l'homogénéisation du noyau sur ce milieu fermé lente également. Les zones de gradient maximum, et donc de haute résolution spatiale, se déplacent ainsi avec le temps dans la coda. En plus de l'intérêt lié au moyennage, cela motive l'utilisation de mesures à différents temps dans la coda pour une inversion donnée.

Pour finir, nous suivons les étapes (7.5) et (7.6) pour calculer la valeur de la fonction de coût  $\chi^2(\mathbf{r})$  en chacun des points  $\mathbf{r}$  du milieu. La sommation se fait ici sur les différentes paires de capteurs et sur les différents temps de mesure dans la coda.

Nous présentons alors trois résultats d'inversions, associés à trois expériences différentes. Chaque expérience correspond à l'ajout d'un diffuseur mou de position et de diamètre donné (voir Tableau 7.1). Les cartes de  $\chi^2$  obtenues sont présentées dans les Figures 7.4, 7.5 et 7.6.

Dans chacune des expériences, le défaut est bien localisé dans la zone de confiance ( $\chi^2 < 1$ ), pour laquelle le désaccord entre données théoriques et données mesurées est de l'ordre de l'erreur de mesure. Les sections efficaces réelles  $\sigma_{\text{vrai}}$  des défauts ajoutés ont déjà été calculées à la section 5.3.2. Nous comparons ces valeurs avec les sections efficaces retrouvées  $\sigma_{\text{inv}}$  grâce au test du  $\chi^2$  (7.5) dans le Tableau 7.1.

---

1. Le temps de calcul du noyau dans la configuration présente est de l'ordre d'une heure.

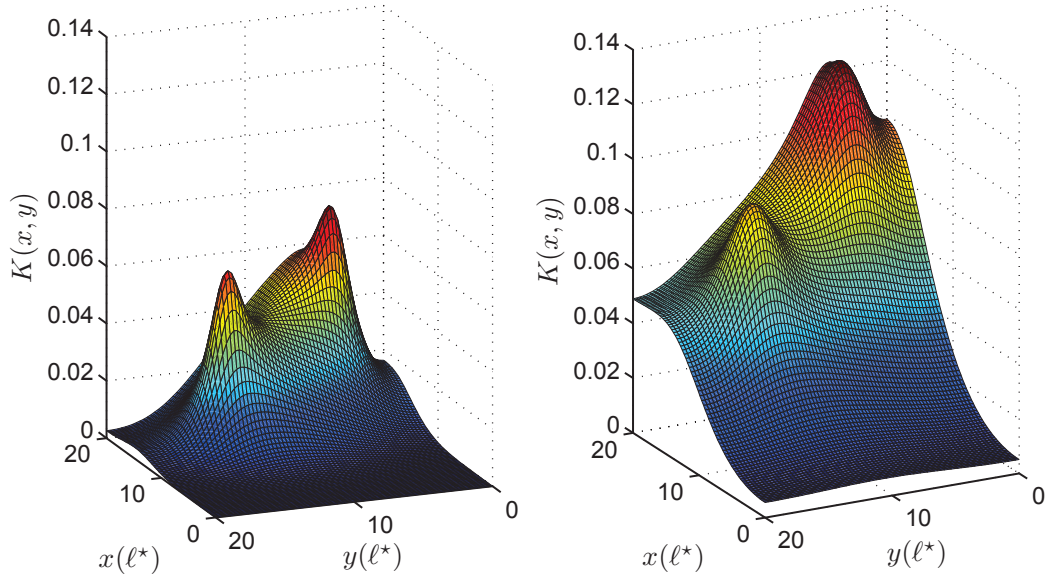


FIGURE 7.3 – Représentation du noyau associé au couple de capteurs 4-10 en fonction de la position hypothétique  $\mathbf{r}(x, y)$  du défaut, partout dans le milieu. Le noyau est issu de la solution de la diffusion en milieu 2D bords réfléchissants. À gauche au temps  $t \approx 300\mu s$  et à droite au temps  $t \approx 900\mu s$  dans la coda. La zone investiguée croît de façon diffusive avec le temps dans la coda. Les maxima du gradient, zones de haute résolution spatiale, se déplacent également.

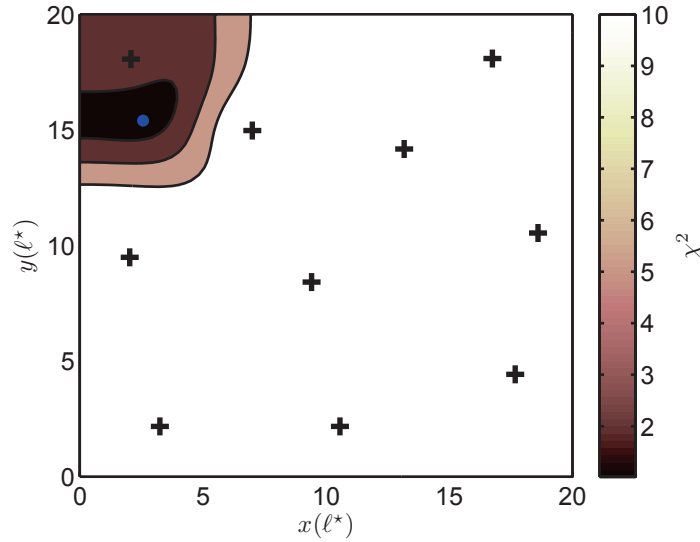


FIGURE 7.4 – Carte de  $\chi^2$  correspondant à la première inversion. La position réelle du défaut de rayon  $r_s = \lambda/5$  est représentée par un point bleu. Les zones claires sont des zones de fort désaccord et les zones sombres de faible désaccord.

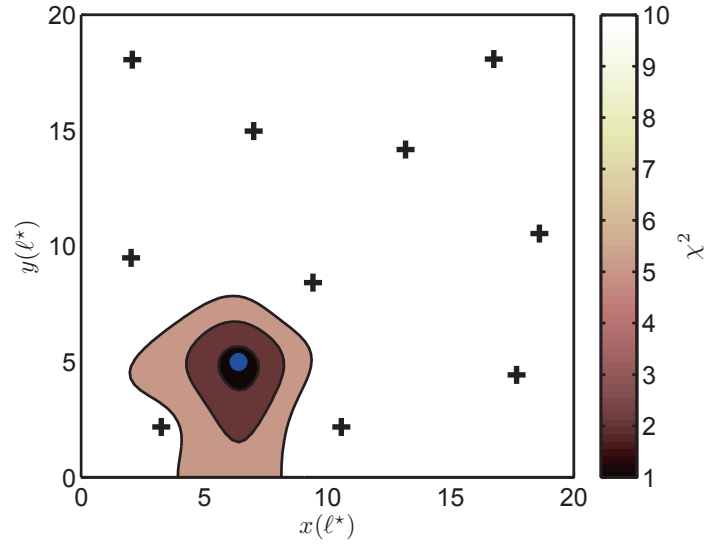


FIGURE 7.5 – Carte de  $\chi^2$  correspondant à la deuxième inversion. La position réelle du défaut de rayon  $r_s = \lambda/3$  est représentée par un point bleu. Les zones claires sont des zones de fort désaccord et les zones sombres de faible désaccord.

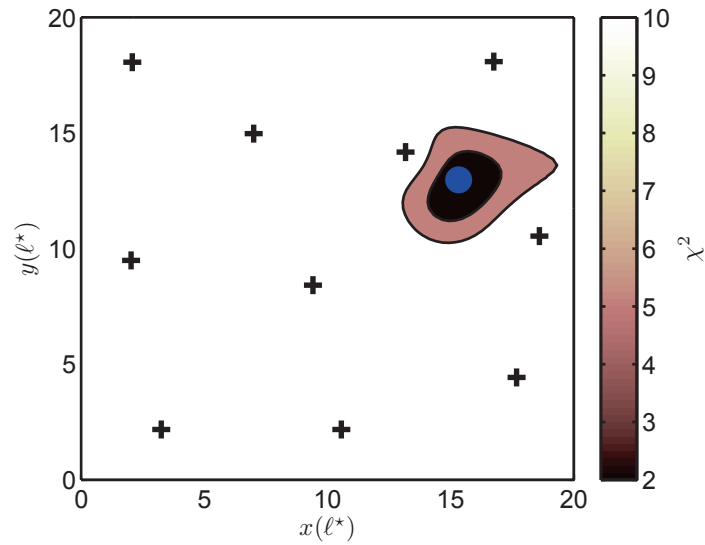


FIGURE 7.6 – Carte de  $\chi^2$  correspondant à la troisième inversion. La position réelle du défaut de rayon  $r_s = \lambda/2$  est représentée par un point bleu. Les zones claires sont des zones de fort désaccord et les zones sombres de faible désaccord.

TABLE 7.1 – Paramètres associés aux différentes expériences. Pour mémoire, la longueur d'onde centrale des signaux vaut  $\lambda_c = 0.75\text{mm}$

Expérience	1	2	3
Figure	7.4	7.5	7.6
$r_s(\text{mm})$	0.15	0.25	0.375
$\sigma_{\text{vrai}}(\text{mm})$	0.79	1.87	3.37
$\sigma_{\text{inv}}(\text{mm})$	0.72	1.62	2.65
erreur relative (%)	9	13	21



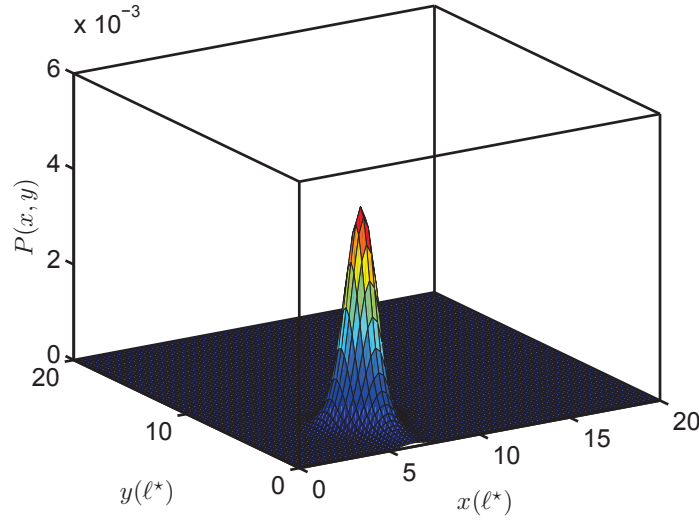


FIGURE 7.7 – Carte de densité de probabilité  $P$  de présence du défaut correspondant à la deuxième inversion. Cette probabilité s'exprime directement en fonction du  $\chi^2$ . Le maximum de  $P$  correspond au minimum du  $\chi^2$  (voir Figure 7.5).

L'erreur relative commise sur l'estimation de la section efficace du défaut augmente avec sa taille. Cet effet est probablement lié au domaine de validité du noyau utilisé (voir section 5.3.4). L'expression du noyau (7.2) est en effet dérivée dans l'approximation d'un défaut de faible section efficace  $\sigma < \lambda$  (voir section 5.1.1).

Pour terminer, nous illustrons dans la Figure 7.7 la carte de probabilité associée à l'expérience 2, calculée à partir de l'équation (7.13).

### 7.3 Application expérimentale du $\chi^2$

Nous présentons dans cette section une expérience réalisée en début de thèse sur un bloc de béton de 600kg (au laboratoire). Les résultats de cette expérience ont été publiés en 2010. Nous présentons cette publication avec quelques corrections mineures et un changement de notations pour rester en accord avec les conventions adoptées dans le manuscrit.

#### Locating a small change in a multiple scattering environment (LOCADIFF)

Eric Larose, Thomas Planès, Vincent Rossetto, Ludovic Margerin.

Article publié dans *Applied Physics Letters*.

##### Abstract :

This article presents an imaging technique to locate a weak perturbation in a multiple scattering environment. We derive a formula to predict the spatio-temporal decorrelation of diffuse coda waves induced by an extra-scatterer.

Locating this new defect is formulated as an inverse problem which is solved by a maximum likelihood approach. Using elastic waves in the 50-400 kHz frequency band, we recover the position of a millimetric hole drilled in a concrete sample with a precision of a few cm. Note that the size of the defect is comparable to the size of the myriads of heterogeneities constituting the sample.

Waves constitute the primary tool to detect and locate temporal changes in natural or man-made structures. Numerous important applications can be found in every day life, including ultrasonic medical imaging, non-destructive testing, seismic exploration, radar aircraft location, sonar... The most common techniques rely on the emission of a controlled pulse (of central period  $T_0$ ) into the medium, which is back-scattered by one or several targets, and recorded at one or several receivers. These pulse-echo approaches are based on the single scattering assumption and are operated in weakly heterogeneous media where the typical propagation time  $T_R$  is much smaller than the scattering mean-free time  $\tau$ . In a heterogeneous multiple-scattering medium, it is well understood that the waves loose memory of their initial direction of propagation beyond a time scale known as the transport mean free time  $\tau^*$ . This feature hampers the location or detection of new targets in a slowly-evolving medium (with time scale  $d$ ), based on conventional pulse-echo techniques. When the following relation applies :

$$T_0 \ll \tau^* \ll T_R \ll d, \quad (7.14)$$

wave propagation is similar to a random walk and can be described by a diffusion equation. The mesoscopic regime (7.14) prevails in many solid materials including iron polycrystals, concrete or multicomposite materials, for which non-destructive evaluation is required.

The problem of locating an isolated change in a multiple scattering sample has received some attention in the past. In optics, the most powerful techniques are based on the variation of intensity in a speckle pattern probed by one or more receivers (Pine *et al.*, 1988; Feng et Sornette, 1991; Vanneste *et al.*, 1993; van Rossum et Nieuwenhuizen, 1999). In the case of collective changes in the medium, the diffusive wave spectroscopy and its variants have become standard tools. In the case of local changes, previous authors (Nieuwenhuizen et van Rossum, 1993) have shown that a new defect -the perturbation-added to a collection of scatterers -the background- essentially acts as a dipole source of intensity. This has been confirmed by the numerical study (Vanneste *et al.*, 1993). These authors also find that the method has weak sensitivity and that a large amount of ensemble or frequency averaging (typically 100 realizations) is required to distinguish the intensity fluctuation caused by the defect from the background speckle pattern. This renders techniques based on intensity variations almost inapplicable to solid media. Other authors proposed to interpret the changes of waveforms in the coda in terms of traveltime variations or phase differences (Cowan *et al.*, 2000; Lobkis et Weaver, 2003; Pacheco et Snieder, 2005). This approach was found to be very sensitive to detect small changes, but gives little information on the location of the change. Recently, Aubry and Derode (Aubry et Derode, 2009) proposed an alternative technique based on the singular value

decomposition of the propagator, but this technique is limited to a strong extra scatterer and is not sensitive to weak perturbations. In this article, we report on a different approach to locate a small isolated change. Our LOCADIFF technique uses simultaneously the information carried by the phase *and* the amplitude of a wavefield. The imaging technique results in a three-dimensional (3D) map representing the likelihood of the change location.

The decorrelation of coda waves induced by the addition of a small defect is best illustrated by a laboratory experiment. We consider a block of concrete which is a common composite and heterogeneous material. The average elastic wave speeds in the sample are  $\approx 4300$  m/s, and  $\approx 2500$  m/s for compressional and shear waves, respectively. The corresponding wavelengths range from a few millimeters to a few centimeters in the 50-400 kHz frequency range. The  $1\text{m} \times 1\text{m} \times 0.25\text{m}$  block consists in a mixture of cement, millimetric sand and centimetric gravel. These heterogeneities render the medium multiply scattering for ultrasound above 100 kHz (Anugonda *et al.*, 2001). Eight ultrasonic transducers  $R$  are glued onto the sample (see Fig. 7.8), either operated as sources or receivers. The experiment consists in successive acquisitions of the impulse responses  $\phi_{ij}^d(t)$  for all available pairs of transducers at various dates  $d$ . Subscript  $i$  (resp.  $j$ ) holds for transducer  $i$  (resp.  $j$ ) located at  $\mathbf{r}_i$  (resp.  $\mathbf{r}_j$ ).

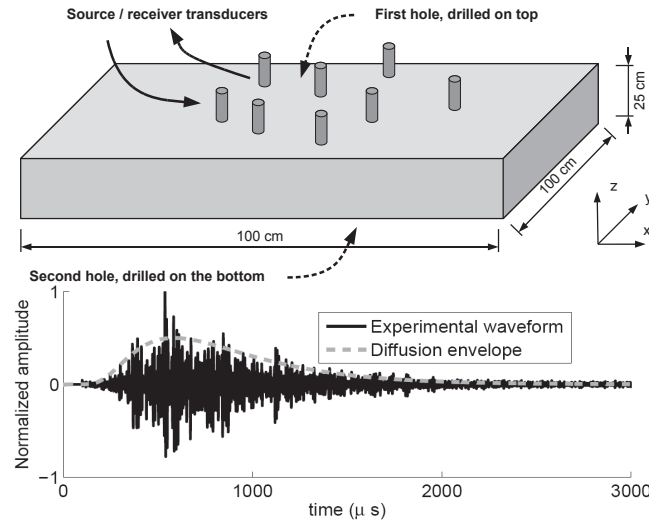


FIGURE 7.8 – Setup for experiment #1&2 (top) and typical ultrasonic waveform (bottom). The concrete block is equipped with eight piezoelectric transducers. After starting the experiment, a hole is drilled on the top side (exp. #1) or on the bottom side (exp. #2) of the block.

In Fig. 7.8 (bottom) we plot an example of an ultrasonic record between  $R_0$  and  $R_3$ . The broken gray line shows the theoretical envelope  $\sqrt{I_{ij}(t)}$  obtained from solutions of the 3D diffusion equation for a point source at  $\mathbf{r}$  and detection at  $\mathbf{r}'$  :

$$\partial_t I(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{1}{\tau_a} I(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - D \Delta_r I(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t) \quad (7.15)$$

where  $I$  also includes reflections from the sides. The diffusion constant  $D = 25\text{mm}^2/\mu\text{s}$  and the absorption time  $\tau_a = 200\mu\text{s}$  are derived from ref. (Anugonda *et al.*, 2001) and are found to properly fit our experimental data.

In order to detect (and, subsequently, locate) an isolated change, we compare the coda waveforms obtained at different dates. In the first experiment, four sets of impulse responses  $\phi_{ij}^d$ , where  $d = 0..3$ , are acquired over the first 60 minutes of the experiment ; then a small hole (3 mm in diameter and 12 mm in height) is drilled on the top of the block, and four additional sets of records ( $d = 4..7$ ) are acquired over another 80 minutes. In the second experiment, we reproduce the same protocole but the hole is 8 mm  $\times$  22 mm and drilled on the other side of the block. For each record  $\phi_{ij}^d$ , and at each date  $d$ , we evaluate the decorrelation coefficient  $DC_{ij}^d(t)$  as follows :

$$DC_{ij}^d(t) = 1 - \frac{\int \phi_{ij}^0(u) \phi_{ij}^d(u) du}{\sqrt{\int \phi_{ij}^0(u)^2 du \int \phi_{ij}^d(u)^2 du}} \quad (7.16)$$

where the integration is performed from 500 to 1500  $\mu\text{s}$ . This experimental decorrelation  $DC_{ij}^d$  is plotted in Fig. 7.9 versus the time in the experiment for three pairs of transducers. We observe that coda waves have decorrelated right after the hole was drilled. This feature is not new and forms the basis of original detection and characterization techniques (Pine *et al.*, 1988; Feng et Sornette, 1991; Cowan *et al.*, 2000; Snieder *et al.*, 2002; Lobkis et Weaver, 2003; De Rosny et Roux, 2001; Michaels et Michaels, 2005). Going from detection to location requires additional information : we will take into account the spatial dependence of the decorrelation (see Fig. 7.9). From previous theoretical works on multiple scattering, we can derive a theoretical prediction for the decorrelation due to an extra-scatterer in  $\mathbf{r}_0$  :

$$DC_{ij}^{\text{th}}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{c\sigma}{2} \frac{\int_0^t I(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_0, u) I(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_j, t - u) du}{I(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, t)} \quad (7.17)$$

where  $\sigma$  denotes the scattering cross-section of the defect, and where only scalar waves are considered. Equation (7.17) is the theoretical model that forms the basis of our inversion procedure.  $(c\sigma/2)^{-1} DC_{ij}^{\text{th}}(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r}$  can be interpreted as the probability that a random walk starting at  $\mathbf{r}_i$  and ending at  $\mathbf{r}_j$  after a time  $t$  passes at least once in the small volume  $d^3\mathbf{r}$  surrounding  $\mathbf{r}$ . In our sample, we can approximate the propagator  $I$  with the solution of the diffusion equation.

Finding the location  $\mathbf{r}$  of the defect from the set of experimental  $DC_{ij}^d$  defines our inverse problem. To solve this inverse problem, we discretize the medium into a regular 3-D grid. Each point  $\mathbf{r}$  of the grid is considered as a candidate location for the apparition of the defect : for each point  $\mathbf{r}$  and each couple of receivers  $\{i, j\}$  a numerical decorrelation  $DC_{ij}^{\text{th}}(\mathbf{r})$  is evaluated after eq. 7.17. Following the maximum-likelihood approach (Press *et al.*, 2007), we calculate the relative residual error  $\chi^2(\mathbf{r})$ , also called the misfit function, between experimental  $DC^d$  and theoretical  $DC^{\text{th}}$  data :

$$\chi^2(\mathbf{x}) = \sum_{i,j} \left( DC_{ij}^d(t) - DC_{ij}^{\text{th}}(\mathbf{r}, t) \right)^2 / (N\epsilon^2). \quad (7.18)$$

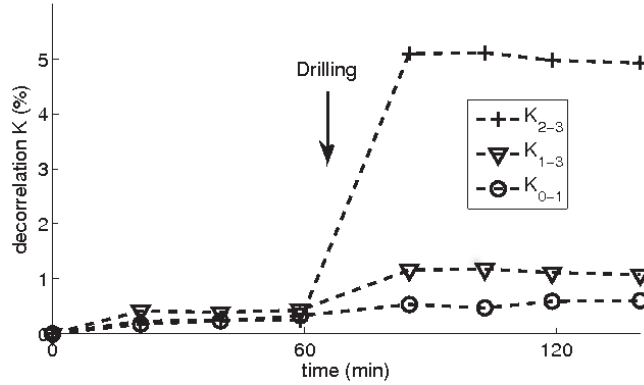


FIGURE 7.9 – Decorrelation  $DC^d$  for transducers 0-1, 1-3 and 2-3 evaluated between 500 and 1500  $\mu s$ . The hole drilled after 60 min is perfectly detected in the coda. The decorrelation strongly depends on the position of the transducers with respect to the change.

$N$  is the number of transducer pairs and the parameter  $\epsilon$  accounts for measurement errors and uncertainties in the transport parameters. Using measurements of the decorrelation in different time windows around time  $t$ , we inferred a typical standard-deviation  $\epsilon = 0.6\%$ . Since the scattering cross-section of the defect is unknown, we also explored values of  $c\sigma/2$  ranging from 0.1 to 20  $\text{cm}^3/\mu s$  and selected the optimal results based on  $\chi^2$  minimization<sup>2</sup>. The result of the inversion procedure is a 3D map of the relative residual error (misfit function)  $\chi^2$ . In Fig. 7.10 we show a slice of the  $\chi^2$  map at the top side of the sample ( $z=25\text{cm}$ ) for exp. #1, and at the bottom side ( $z=0\text{cm}$ ) for exp. #2. The crosses indicating the location of the defects coincides remarkably well with the minimum of the misfit function.

The crucial physical parameter in our inversion is the lapse time  $t$  in the coda for which the decorrelation is evaluated. In the late coda, the sensitivity to the defect is maximum, but the decorrelation depends only algebraically on the defect location and the decorrelation tends to spatially homogenize on the scale of our sample. On the other hand, the decorrelation at early times shows rapid spatial variations but its absolute value is very small and within the experimental error. Therefore, there exists a trade-off between lateral resolution and sensitivity which points towards the existence of an optimal lapse time, for which the best compromise is obtained.

In this article, we have presented an imaging technique, named LOCADIFF, to locate a small change in a multiple scattering medium. Our technique has the following prerequisites : 1) estimate of the transport properties; 2) reproducible experimental apparatus; 3) calculation of the transport intensity between any point in the probed medium; 4) geometry of the medium. The technique was proved to efficiently detect and locate a small hole in two different experimental configurations. In the first experiment,

2. Une méthode plus efficace et directe pour calculer la section efficace du changement a été présentée dans la section 7.1.1

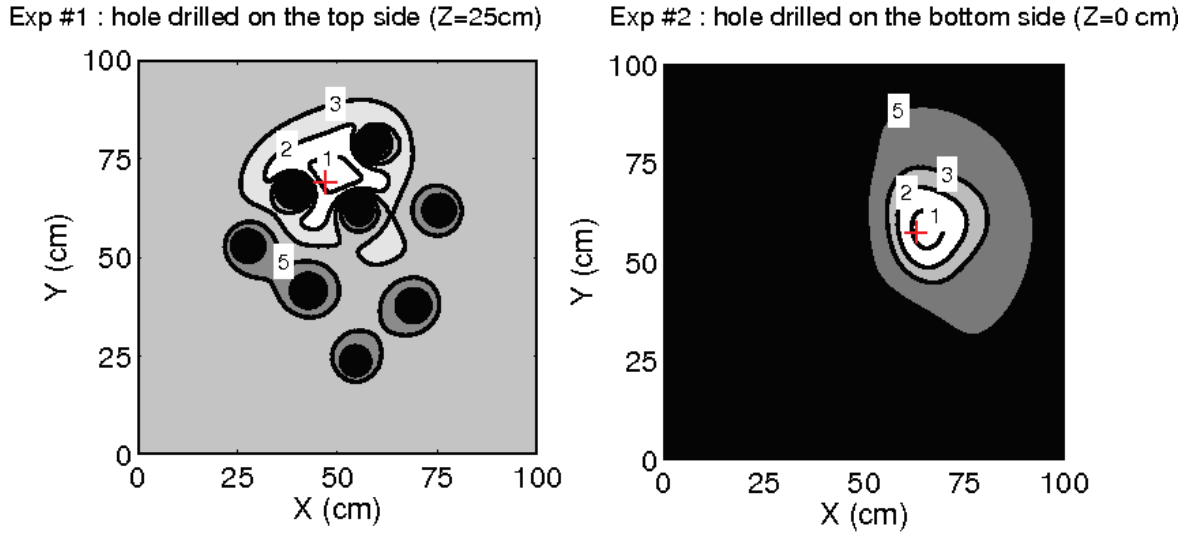


FIGURE 7.10 – Slices of the normalized residual error  $\chi^2$  after the inversion. Left : on the top side ( $z=25\text{cm}$ ) during experiment #1. Right : at the bottom side ( $z=0\text{cm}$ ) during experiment #2. The defect positions are highly likely within the white areas defined by  $\chi^2 < 1$ . The actual position of the holes are marked with a cross. The black areas where  $\chi^2 > 10$  mark the positions where the defect is very unlikely. Note that for exp. #1, these black areas also correspond to the positions of the transducers.

a 3 mm×12 mm is drilled on the same side than the transducers. In the second experiment, a 8 mm×22 mm hole is drilled on the other side. In both cases, the position of the defect is retrieved in 3D with a resolution of a few cm (including the vertical direction). Note that the size of the hole is comparable to the size of the heterogeneities constituting the sample, and that such a defect is hardly detected by conventional ultrasonic techniques because multiple scattering hampers the detection of ballistic echoes. Compared to previous works based on intensity fluctuations (Pine *et al.*, 1988; Feng et Sornette, 1991; Vanneste *et al.*, 1993; van Rossum et Nieuwenhuizen, 1999), our method has much higher sensitivity and takes advantage of broadband waveforms. The technique is applicable to any kind of classical waves propagating in highly heterogeneous media, provided that those waves are probed both in phase and amplitude. We suggest applications to non-destructive testing and monitoring of multi-composite materials, including civil engineering structures<sup>3</sup>. Applications to monitoring dynamic geophysical media are also on the way.

3. Patent number FR09-50612

## 7.4 Limites de la méthode

Nous avons donc testé cette méthode basée sur la minimisation du  $\chi^2$  sur des simulations numériques et sur une expérience de laboratoire. Cette procédure s'est avérée efficace pour retrouver la position et la force d'un changement local unique survenu dans un milieu hétérogène. Essayons maintenant d'appliquer le test du  $\chi^2$  dans le cas de plusieurs changements locaux simultanés. Nous reprenons les simulations numériques précédentes (section 7.2) mais nous introduisons cette fois-ci en même temps dans le milieu simulé les trois défauts décrits dans le Tableau 7.2. La Figure 7.11 représente la carte de  $\chi^2$  calculée pour cette 4ème expérience.

TABLE 7.2 – Paramètres associés aux différentes expériences. On rappelle la valeur de la longueur d'onde centrale des signaux  $\lambda_c = 0.75\text{mm}$ .

Expérience	1	2	3	4
Figure	7.4	7.5	7.6	7.11
$r_s(\text{mm})$	0.15	0.25	0.375	0.15 ; 0.25 ; 0.375
$\sigma_{\text{vrai}}(\text{mm})$	0.79	1.87	3.37	$0.79+1.87+3.37=6.03$
$\sigma_{\text{inv}}(\text{mm})$	0.72	1.62	2.65	4.17
erreur relative (%)	9	13	21	31

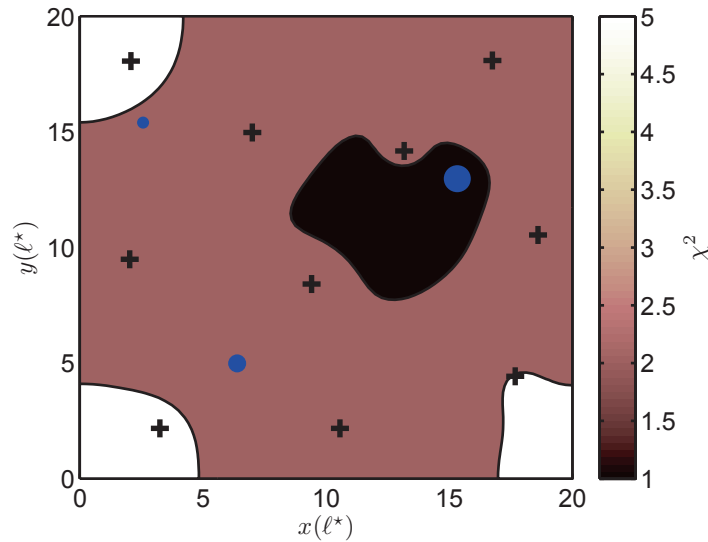


FIGURE 7.11 – Carte de  $\chi^2$  correspondant à la quatrième inversion. Les positions exactes des trois nouveaux diffuseurs de rayons  $r_s = \lambda/5, \lambda/3, \lambda/2$  sont représentées par des disques bleus. Les zones claires sont des zones de fort désaccord et les zones sombres de faible désaccord. La méthode ne parvient pas à localiser les trois changements. Le contraste du  $\chi^2$  est largement diminué et la zone la plus probable semble correspondre qualitativement au barycentre des défauts.

La méthode échoue, les trois défauts ne sont pas retrouvés. La zone la plus probable englobe le plus gros défaut mais la résolution est moindre. On constate que le contraste de la fonction est largement diminué (voir l'échelle de couleur). Ce résultat était prévisible car par nature, cette fonction  $\chi^2$  est destinée à repérer le point unique de meilleur compromis pour expliquer les différentes mesures. La zone retrouvée dans ce cas semble correspondre à une sorte de barycentre des défauts. On note que la section efficace retrouvée est approximativement reliée à la somme des sections efficaces des trois défauts.





# Chapitre 8

## Localiser plusieurs changements simultanés

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit une méthode permettant de localiser et d'estimer la force d'un changement local unique. Nous avons cependant démontré à l'aide de simulations numériques son incapacité à localiser plusieurs défauts apparaissant simultanément dans le milieu étudié.

Dans un premier temps, afin d'étudier ces limitations dans le cas pratique, nous appliquons cette méthode du  $\chi^2$  pour surveiller un bloc de béton de 15 tonnes soumis à un essai de flexion. Cette expérience à « taille réelle », nommée RL7 (retrait libre n ° 7), fait partie du projet CEOSFR<sup>1</sup>. Lors de cet essai, des zones d'endommagement étendues sont apparues simultanément dans l'ouvrage, limitant grandement l'applicabilité de la méthode d'inversion actuelle.

Dans un second temps, nous étendons la formulation du problème direct pour le cas de changements locaux simultanés et nous adaptons un schéma d'inversion matriciel au sens des moindres carrés. Cette méthode d'inversion est discutée et appliquée aux simulations numériques en différences finies.

### 8.1 RL7 : Une expérience à « taille réelle »

#### 8.1.1 Objectifs

Plusieurs objectifs ont motivé l'application de la méthode Locadiff à l'essai sur le corps d'épreuve RL7 (retrait libre n ° 7) du projet CEOSFR.

- tester l'adaptation de la technique à une maquette en vraie grandeur (bloc de 15 tonnes)

---

1. Consortium rassemblant plusieurs services publics et entreprises privées : ANDRA, AREVA, CEA, EDF, BOUYGUES, etc..(ceosfr.org)

- capacité expérimentale à enregistrer des coda ultrasonores sur des distances d'un ou de plusieurs mètres
- capacité de la méthode à s'adapter à des acquisitions toutes les 20 minutes (temps d'un palier de chargement)
- passer d'un défaut ponctuel artificiel localisé (section 7.3) à :
  - un défaut étendu (non-ponctuel) : une fissure
  - plusieurs défauts simultanés
  - des défauts apparaissant dans un matériau sous contraintes très fortes (proche de la ruine)
- démontrer la sensibilité de la technique à l'apparition de défauts, en particulier avant l'apparition de la fissure en surface.
- caractériser les défauts :
  - la taille des défauts.
  - la géométrie des défauts.

### 8.1.2 Protocole expérimental

Cette expérience d'endommagement en essai de flexion quatre points s'est déroulée le 25 novembre 2010, sur le site de Vinci à Marolles en Hurepoix. La poutre en retrait libre RL7 a été équipée de 20 transducteurs piézoélectriques sur sa face supérieure. Le nombre de transducteurs utilisés est imposé par la disponibilité du matériel du laboratoire au moment de l'essai. Ce nombre est inférieur au nombre de capteurs nécessaires pour obtenir une résolution satisfaisante. Néanmoins, une image 2D dans le plan A-A est réalisable (voir Figure 8.1). Le choix de n'instrumenter qu'une seule face répond à une exigence pratique de surveillance des enceintes de confinement.

Durant l'essai de flexion, les deux extrémités de la poutre sont verrouillées au bâti par des tiges d'acier, et deux rangées de vérins imposent une contrainte sous le bloc (voir Figure 8.1). Chaque palier est composé d'un temps de chargement suivi d'un temps de repos durant lequel chacune des réponses impulsionnelles entre les 8 sources (en rouge) et les 12 récepteurs (en bleu) est enregistrée et sauvegardée. Les sources émettent une rampe en fréquence (variation linéaire de la fréquence au cours du temps) de 50kHz à 200kHz pendant 5ms. Le signal est amplifié à 400Vpp et chaque acquisition est constituée d'une répétition de 40 excitations, qui sont ensuite moyennées. Pour chaque couple source-récepteur, nous enregistrons à la fois la source (avant son étage d'amplification de puissance) et la réception (en aval de son pré-amplificateur). Pour obtenir les réponses impulsionnelles, chaque enregistrement est inter-corrélé avec le signal émis.

Avant corrélation avec le signal source exciteur, et avant les opérations de moyennes, l'ensemble des données représente 30Go pour les 22 paliers de chargement et les 12 x 8 = 96 couples source-récepteur. Après corrélation et moyennes, l'ensemble des données représente 300Mo.

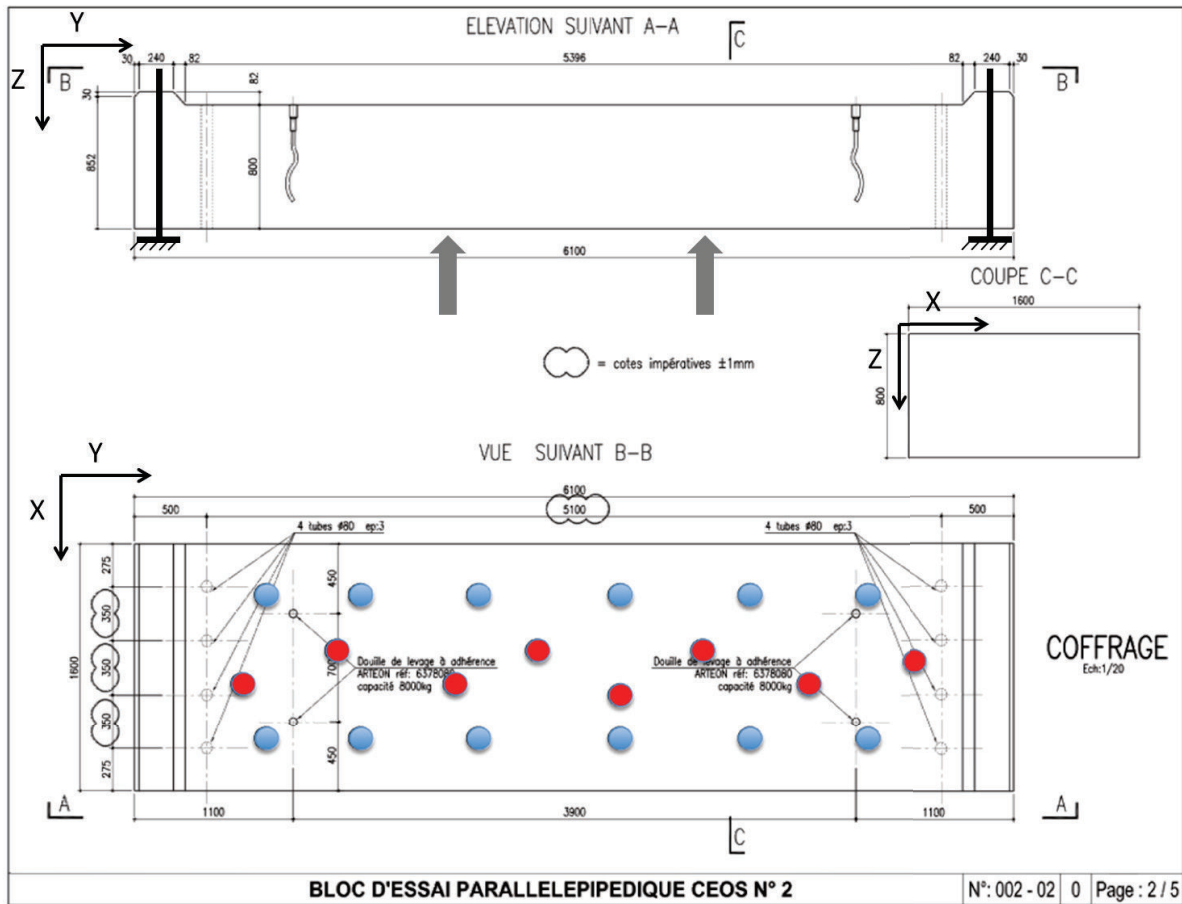


FIGURE 8.1 – Coupe du bloc et disposition des capteurs ultrasonores, 8 sources au centre (en rouge) et 12 récepteurs sur les côtés (en bleu). Sur la vue A-A, les tiges de maintien sont représentées schématiquement en noir et la position des deux rangées de vérin par les flèches grises.

L'application de la méthode Locadiff (ici via le test du  $\chi^2$ ) se fait à partir des mesures de décorrélation entre les réponses impulsionnelles associées à deux paliers donnés. L'inversion notée Palier  $i - j$  correspond aux changements qui interviennent entre le temps de repos (et d'acquisition) du palier  $i$  et le temps de repos du palier  $j$ . Le modèle numérique est calculé à partir de la solution de l'équation de diffusion. Lors de ce premier traitement, seules les réflexions sur la surface supérieure et inférieure du bloc sont prises en compte. Cette approximation reste cohérente avec la géométrie de la poutre et le souhait de n'imager qu'une section A-A du bloc (plan YZ, Figure 8.1).

### 8.1.3 Résultats

Nous présentons ici les cartes de  $\chi^2$  obtenues dans les approximations introduites dans le chapitre précédent, c'est à dire en recherchant un défaut unique et ponctuel.

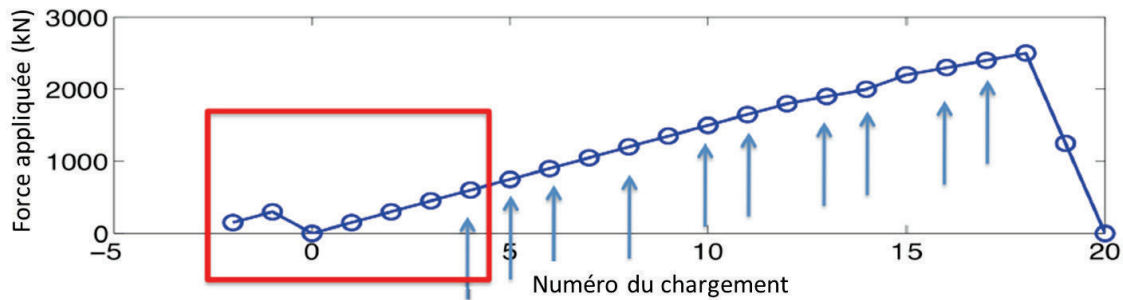


FIGURE 8.2 – Force appliquée sous la poutre, en fonction du numéro de chargement. Ce numéro désigne également le palier de repos qui suit. Les flèches grises indiquent l'apparition de fissures macroscopiques en surface. Le carré rouge correspond à la période sur laquelle les résultats Locadiff sont présentés.

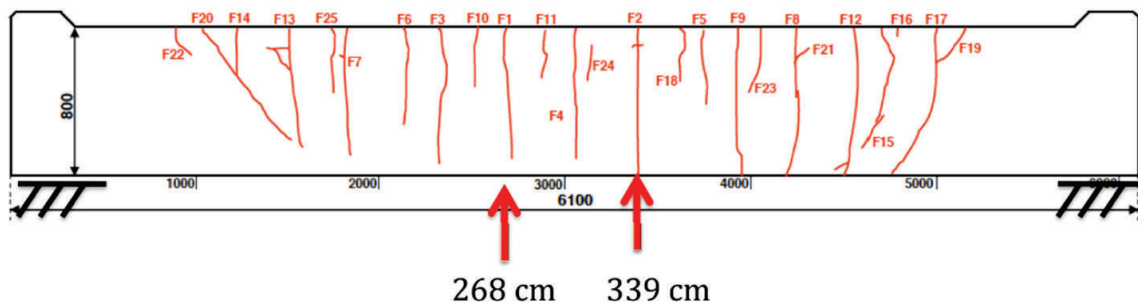


FIGURE 8.3 – Relevé de fissuration à l'issue de l'ensemble des chargements. Les flèches rouges indiquent la position des deux premières fissures, qui apparaissent au chargement n° 4. Durant ce palier, leur profondeur n'est pas connue précisément, mais il est certain qu'elles ne sont pas encore traversantes (30 à 40cm au plus).

Compte tenu du grand nombre de changements qui s'opèrent simultanément dans le matériau (plusieurs fissures apparaissent en même temps), nous divisons le réseau de capteurs en deux sous-réseaux de part et d'autre du bloc, comprenant chacun 10 transducteurs. L'image Locadiff globale du bloc est alors une juxtaposition côte à côte des deux images obtenues séparément et indépendamment l'une de l'autre. Nous limitons également l'étude aux premiers paliers de chargement (Figure 8.2), bien avant la ruine du bloc (Figure 8.3). Le nombre de fissures ouvertes en fin d'essai est si élevé que la propagation d'ultrasons entre les capteurs est quasiment inexistante.

Chaque image est également affectée d'une mesure de la section efficace  $\sigma$  du changement, en  $\text{cm}^2$ . Si le défaut est unique dans la zone investiguée, alors cette section efficace est liée à sa taille réelle. Si les défauts sont multiples, alors la section efficace est liée à

la somme des sections de chaque défaut<sup>2</sup>.

On note que les deux paliers de préparation -2 et -1 (voir Figure 8.2) ne sont pas exploités ici. Différentes inversions, associées à différentes combinaisons de paliers sont présentées dans les Figures 8.4, 8.5 et 8.6. La position des quatre premières fissures apparues (F1 à F4) est également indiquée sur ces Figures et leur moment d'apparition est visible sur la Figure 8.2. Le trait blanc vertical au centre marque la séparation entre les deux images, obtenues avec les deux sous-réseaux (deux inversions indépendantes).

Les zones les plus sombres sont les zones de forte probabilité de changement ( $\chi^2$  faible). La position du minimum est indiquée par un cercle blanc.

#### 8.1.4 Discussion

##### Section efficace de diffusion des défauts

La section efficace des défauts apparus entre les paliers 0-1 et 1-2 est faible (moins de 100 cm<sup>2</sup> au total sur l'ensemble de la structure), et pourrait correspondre à une micro-fracturation volumique. Elle est cependant à peine au dessus de la limite de sensibilité de la méthode pour cette configuration de capteurs, et pour les fréquences étudiées. Il n'est pas possible de conclure de façon certaine à l'apparition d'endommagement pour ces premiers paliers de chargements, même si elle est probable.

En faisant l'hypothèse que les défauts qui apparaissent entre les paliers  $i$  et  $i + 1$  subsistent dans les états postérieurs (ex :  $i + 2$ ,  $i + 3$ ), il serait possible de cumuler l'effet de l'apparition et du développement des fissures en comparant des paliers plus éloignés dans le temps (ex :  $i - i + 3$ ). Nous vérifions ainsi que la somme des sections efficaces de diffusion entre chaque palier correspond très grossièrement à la section efficace de diffusion de la somme des paliers<sup>3</sup> (Figures 8.4 et 8.5). Cette propriété est cependant limitée aux faibles endommagements.

L'augmentation significative de la fracturation est perceptible dès l'inversion 2-3, alors que la fissuration macroscopique n'est visible sur le bloc qu'à partir du palier 4 (Figure 8.2). La technique permet donc de détecter précocement l'apparition d'un endommagement majeur. À l'inversion 2-3, la section efficace totale des défauts détectés est de 400 cm<sup>2</sup>. Dans l'hypothèse de l'apparition de deux fissures (initiation de F1 et F2), la taille équivalente des fissures serait donc de l'ordre de 14 cm x 14 cm pour chacune.

Lors de l'inversion 3-4, c'est-à-dire au moment où les fissures F1 et F2 apparaissent en surface, les sections de diffusion des défauts augmentent très sensiblement (3500 cm<sup>2</sup> et 5300 cm<sup>2</sup>, respectivement). La section totale des fissures entre deux paliers successifs est une indication importante qui apporte une contrainte sur leur extension spatiale. Cette information peut être couplée aux informations de localisation (ci-dessous) pour

2. Le lien précis entre  $\sigma$  et la taille réelle d'une fissure est en cours d'investigation, mais en première approximation c'est bien le même ordre de grandeur.

3. Voir les simulations numériques section 7.4.

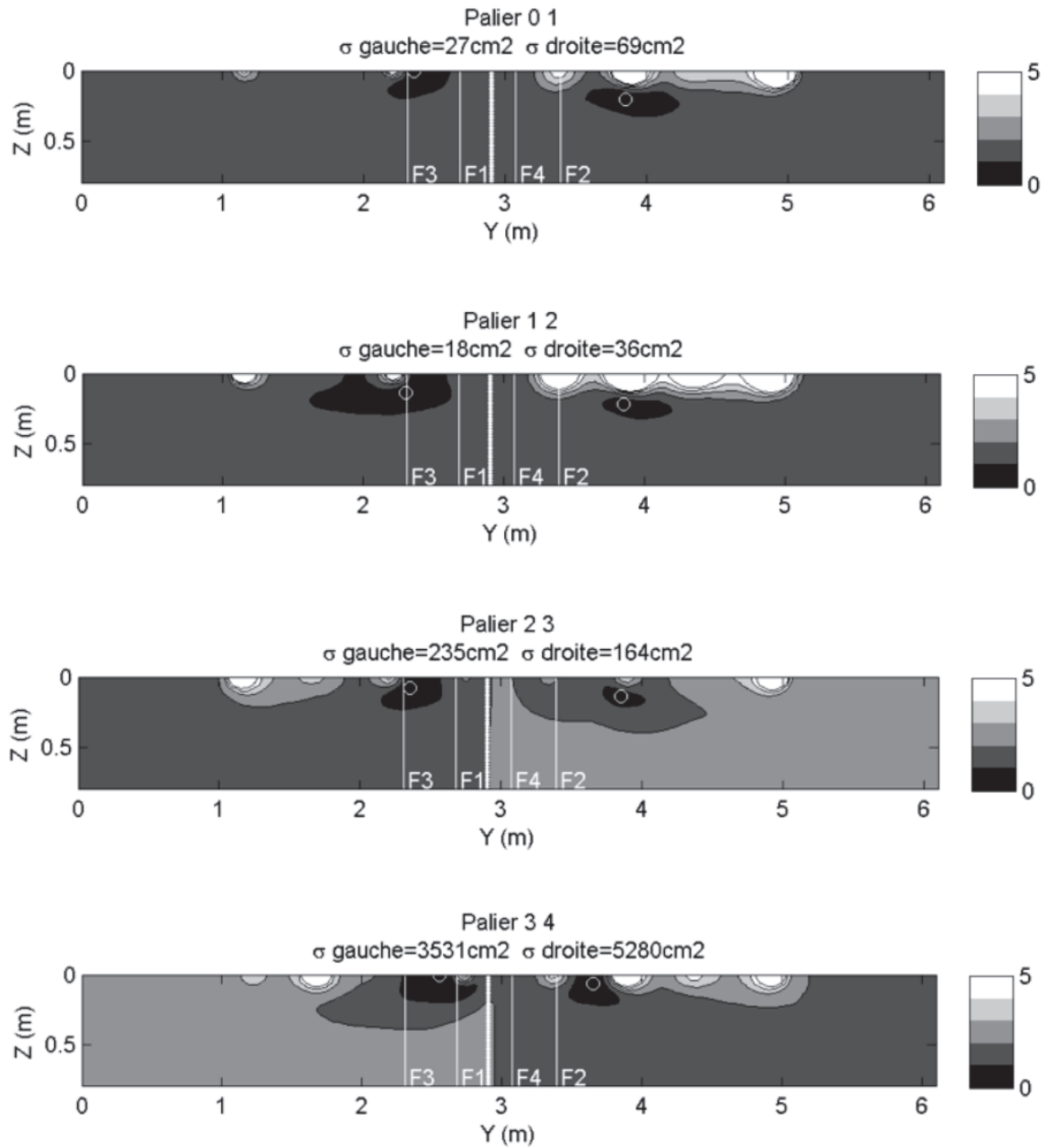


FIGURE 8.4 – Représentation d’une coupe verticale de la carte 3D du  $\chi^2$  (coupe A-A) pour différents paliers. Les changements (défauts) apparus entre chaque paliers sont localisés dans les zones sombres.

caractériser la géométrie des défauts apparus. La relation précise entre la section efficace (vue par les ultrasons) et la surface réelle du défaut reste à investiguer.

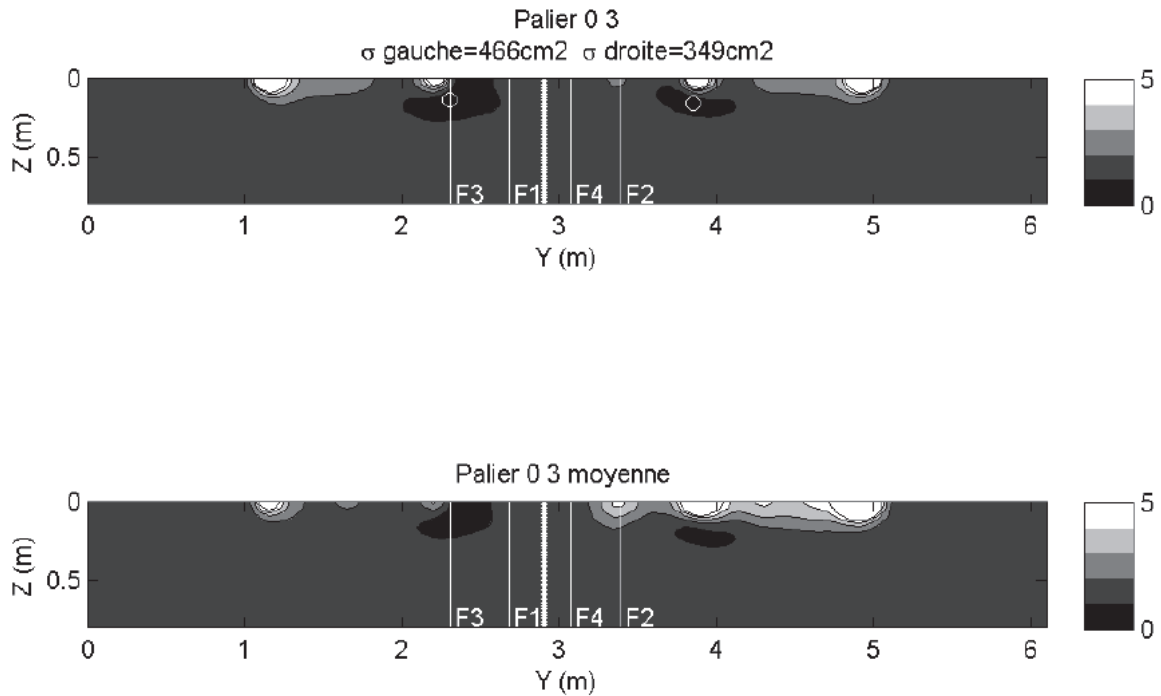


FIGURE 8.5 – Comparaison de l’image obtenue (en haut) en comparant le palier 3 au palier 0, et (en bas) en moyennant toutes les images intermédiaires obtenues en comparant le palier 3 à 2, 2 à 1 et 1 à 0.

### Localisation des défauts

Nous séparons ici deux discussions, d’une part la position latérale des défauts (selon la grande dimension  $Y$ ), et d’autre part la position verticale (profondeur  $Z$ ). La petite dimension horizontale  $X$  n’est pas étudiée, d’une part par manque de capteurs sur cet axe, d’autre part pour des raisons de symétries de l’expérience (voir Figure 8.1).

Verticalement, nous observons une localisation de l’endommagement sur une trentaine de centimètres de profondeur. Cet endommagement est observé dans la partie gauche du bloc comme dans la partie droite. Dans l’approximation d’une fissuration 2D (plan  $X-Z$ ), et en exploitant les informations fournies par les sections efficaces et la géométrie du bloc, nous obtenons des tailles de fissures de  $160\text{cm} \times 21\text{cm}$  à gauche, et  $160\text{cm} \times 33\text{cm}$  à droite. Les informations sur la hauteur de la fissure fournies d’une part par les images Locadiff, et d’autre part par la mesure des sections efficaces, sont indépendantes et cohérentes entre elles (une trentaine de centimètres de hauteur dans les deux cas).

La zone de changement localisée à gauche est stable sur tous les paliers, ce qui va dans le sens d’un effet cumulatif de l’endommagement sur cette région. La zone d’endommagement localisée à droite semble migrer de la droite vers la gauche, pour se rapprocher de la zone effective de la fissure F2 (et F4). Néanmoins, la localisation latérale n’est pas satisfaisante, à gauche comme à droite, le minimum du  $\chi^2$  est observé à des positions



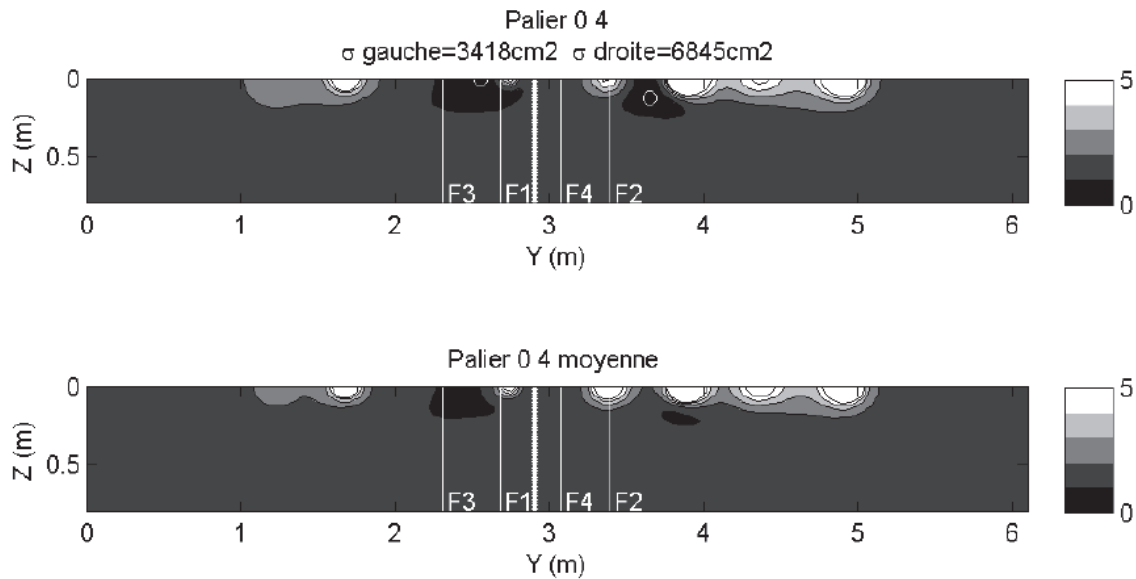


FIGURE 8.6 – Comparaison de l’image obtenue (en haut) en comparant le palier 4 au palier 0, et (en bas) en moyennant toutes les images intermédiaires obtenues en comparant le palier 4 à 3, ... et 1 à 0.

éloignées des fissures réelles F1 et F2 respectivement. Plusieurs facteurs peuvent être mis en cause :

- le  $\chi^2$  est calculé par rapport à un modèle d’endommagement ponctuel unique, sans tenir compte de l’extension spatiale et de l’effet cumulatif de plusieurs fissures (coté gauche F1+F3+F6..., coté droit F2+F5+F8...). C’est la raison la plus probable (voir section 7.4).
- la déformation du bloc semble la plus importante autour des positions  $Y = 2.5\text{m}$  et  $Y = 3.5\text{m}$  (Figure 8.7). Ces zones (à l’aplomb des des vérins) sont donc des zones privilégiées pour l’ouverture de fissures, celles-ci pouvant constituer un réseau diffus perceptible par les ultrasons.

### 8.1.5 Conclusion

L’expérience CEOSFR a permis de démontrer ou d’observer les points suivants, exposés en échos des objectifs présentés en section 8.1.1 :

- le dispositif instrumental permet d’enregistrer correctement des coda ultrasonores sur un bloc de béton de plusieurs mètres, malgré la forte atténuation. Cela n’avait jamais été démontré auparavant. La durée totale d’une acquisition est de 10 minutes, durée compatible avec des paliers de chargement de 20 minutes.

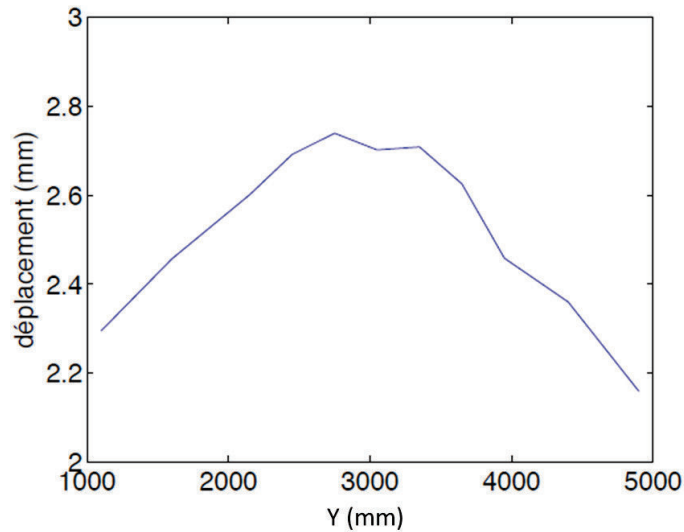


FIGURE 8.7 – Déplacement vertical à la surface supérieure du bloc, cumulé du palier 0 au palier 4. Le chargement s'effectue au niveau des positions horizontales  $Y = 2500\text{mm}$  et  $Y = 3500\text{mm}$ .

- les défauts apparus ont été détectés par la méthode, au moins sur les premiers paliers de chargements (paliers 0 à 4) où la fissuration était globalement limitée. On note particulièrement la détection précoce d'un endommagement fort à l'inversion 2-3, avant l'apparition en surface des premières fissures.
- pour les paliers suivants, le nombre de fissures ouvertes est trop important pour que les ultrasons se propagent à travers le bloc. Cela démontre que la méthode Locadiff n'est pas adaptée lorsque la densité de fissures ouvertes (remplies d'air) est trop importante. Néanmoins, dans le cas d'un liquide (de l'eau par exemple) qui remplit les fissures, cette limite n'a pas lieu d'être car le liquide autorise le transport des ultrasons.
- la localisation, à ce stade, n'est pas satisfaisante. Il n'a pas été possible de localiser précisément ces fissures pour plusieurs raisons :
  - d'une part à cause d'un nombre trop faible de capteurs mis en place,
  - d'autre part, d'un point de vue méthodologique, parce que les défauts sont étendus (non ponctuels) et multiples (apparitions simultanées), et ne remplissent donc pas l'hypothèse de base de l'algorithme d'inversion actuellement utilisé,
  - de plus, parce que l'intensité des chargements (la force supplémentaire appliquée à chaque palier) est trop importante.
- la mesure de section efficace de diffusion peut apporter des renseignements sur l'extension de la fissure, en particulier sa hauteur. On note qu'au palier 4, deux observations cohérentes semblent indiquer une profondeur de fissuration de l'ordre de 30cm. Pour confirmer ce résultat, cette observation devrait être recoupée à d'autres observations extérieures effectuées sur cet essai RL7. Ces observations ne

sont pas accessibles à ce jour. Il n'est pas possible, avec la méthode actuelle, de déterminer la géométrie de la fissure.

Tous ces points, qui représentent autant de défis expérimentaux et méthodologiques, ont du être traités en même temps, ce qui a constitué un saut technologique et méthodologique trop important. Des nombreuses pistes d'amélioration et d'adaptation de la méthode Locadiff à l'imagerie de fissures existent, avec de réelles potentialités de réussite. Les avancées devront être incrémentales et les démonstrations expérimentales focalisées sur un objectif à la fois.

D'un point de vue expérimental, la résolution peut être améliorée en augmentant le nombre de capteurs. Le gain attendu croît comme la racine carrée du nombre de couples source-récepteurs. Il est également possible d'améliorer la résolution en augmentant la fréquence, mais au prix d'une atténuation plus forte et donc d'une profondeur investiguée amoindrie.

D'un point de vue méthodologique, des améliorations peuvent être apportées à la construction du problème direct et du problème inverse. Au niveau du problème direct, la description du transport de l'intensité utilisée pour le calcul du noyau peut être améliorée par la résolution de l'équation du transfert radiatif. Le noyau peut aussi être corrigé pour traiter convenablement des défauts de fortes section efficaces (voir section 5.1.2). La formulation du problème direct doit également être étendue à l'apparition simultanée de plusieurs défaut.

En parallèle, il est nécessaire de développer un schéma d'inversion plus sophistiqué permettant d'obtenir une carte des différents changements s'opérant dans le milieu.

Dans la section suivante, nous proposons d'étendre le problème direct à l'apparition simultanée de plusieurs changements locaux. Un algorithme d'inversion matriciel au sens des moindres carrés sera utilisé pour accomplir l'inversion. La validité de cette nouvelle méthode sera discutée et illustrée par une application en simulation numérique.

## 8.2 Inversion de changements simultanés

Dans la logique des résultats expérimentaux présentés à la section précédente, nous nous concentrons ici sur le cas des changements de « structure », qui correspondent à l'apparition de forts contrastes d'impédance dans le milieu (une fissure par exemple). Sur le plan théorique, nous avons étudié jusqu'ici le cas idéal d'un changement local unique intervenant dans le milieu (chapitre 5). Cette situation nous a permis de prédire de façon exacte la décorrélation des ondes de la coda. Cependant, cette approximation forte n'est que rarement réaliste pour l'étude d'un milieu réel. Par exemple, comme observé dans la section précédente, plusieurs fissures étendues peuvent apparaître simultanément dans le milieu. Des changements complexes s'opèrent également à l'échelle des ondes sismiques (intrusion de magma dans un volcan, glissement de faille).

On peut noter ici que pour le cas des changements de vitesse (faible contraste d'impédance), traité au chapitre 6, la formulation du problème direct pour des défauts étendus est linéaire<sup>4</sup>.

Pour le cas des changements de structure, comme discuté dans le chapitre 5, la construction d'un modèle théorique pour décrire un ensemble de défauts quelconques serait bien trop complexe. Pour dériver l'expression de la décorrélation, cela nécessiterait de connaître l'expression exacte du potentiel  $\mathbf{V}$  de chaque défaut ainsi que leurs différentes corrélations. Et même si cette description était possible, l'application d'un algorithme d'inversion ne serait pas envisageable compte tenu du nombre trop important d'inconnues à estimer.

Nous proposons alors de laisser de côté la problématique de l'extension spatiale des changements de structure mais d'étendre notre étude à un ensemble de défauts ponctuels, suffisamment éloignés pour pouvoir négliger leurs interactions.

Nous formulons alors l'effet de l'ensemble des nouveaux diffuseurs comme une superposition linéaire de l'effet de chacun d'entre eux pris séparément.

### 8.2.1 Nouvelle formulation du problème direct

Pour l'étude de la décorrélation, il convient de discrétiser le milieu en  $P$  voxels. À chaque voxel  $i$  centré sur la position  $\mathbf{r}_i$  est associée une section efficace  $\Sigma_i$  correspondant à la section efficace du changement intervenant dans celui-ci. Le changement en chaque point du milieu est donc quantifié en terme de section efficace par le vecteur colonne  $\Sigma$  de taille  $P$ .

De même, en considérant  $N$  paires de capteurs, les décorrélations mesurées par chacune d'entre elles sont rassemblées dans le vecteur colonne  $\mathbf{DC}$  de taille  $N$ . Ces deux grandeurs sont alors reliées par une version discrétisée du noyau  $\mathbf{K}$ , sous forme d'une matrice  $N \times P$  :

$$K_{ij} = K(\mathbf{S}_i, \mathbf{R}_i, \mathbf{r}_j, t) \quad (8.1)$$

où  $\mathbf{S}_i$  et  $\mathbf{R}_i$  sont les positions de la source et du récepteur de la paire  $i$  et  $\mathbf{r}_j$  la position centrale du voxel  $j$ . Le temps  $t$  correspond au temps central de la mesure dans la coda. Encore une fois, il est possible de réaliser des mesures à différents temps dans la coda, ce qui revient à augmenter le nombre de ligne des matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{DC}$ . La relation linéaire entre  $\mathbf{DC}$  et  $\Sigma$  s'écrit alors comme un produit matriciel, qui est une extension de la relation (7.3) à des changements multiples :

$$\mathbf{DC} = \frac{c}{2} \mathbf{K} \Sigma \quad (8.2)$$

---

4. Cette propriété, démontrée à la section 6.1.2, découle de l'utilisation de l'approximation de Born.

où  $c$  est la vitesse des ondes.

Remarque :

Pour l'étude de changements de vitesse, la version discrète de la relation (6.20) s'écrit :

$$\Psi = -V_{\text{vox}} K \Delta \quad (8.3)$$

où  $\Psi$  contient les variations de temps d'arrivées mesurées par les  $N$  différentes paires de capteurs, autour du temps  $t$  dans la coda.  $\Delta$  contient les variations relatives de vitesse dans chacun des  $P$  voxels du milieu, c'est à dire  $\Delta_i = \frac{dv}{v}(\mathbf{r}_i)$  et  $V_{\text{vox}}$  représente le volume d'un voxel.

Il existe une multitude de méthodes pour inverser ces problèmes linéaires (Nocedal et Wright, 1999) que l'on peut écrire de façon générale comme :

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m} \quad (8.4)$$

où  $\mathbf{d}$  correspond aux données mesurées (ex :  $\mathbf{DC}^{\text{exp}}$ ),  $\mathbf{m}$  au modèle que l'on cherche à obtenir (ex :  $\Sigma$ ) et  $\mathbf{G}$  à la physique qui relie ces grandeurs (ex :  $\frac{c}{2}\mathbf{K}$ ).

Une méthode de résolution au sens des moindres carrés, décrite par Tarantola et Valette (1982), permet d'obtenir une solution explicite par inversion de matrice. Cette méthode, largement utilisée en géophysique a été appliquée au problème des variations de vitesses décrit ci-dessus par Froment (2011), sur des données sismiques passives acquises le long de la faille du Longmen Shan en Chine.

Nous proposons dans les paragraphes suivants de décrire et appliquer cette méthode à l'inversion d'une carte de sections efficaces de changements (défauts).

### 8.2.2 Inversion linéaire au sens des moindres carrés

L'utilisation des moindres carrés pour comparer des données expérimentales à un modèle théorique remonte aux travaux de Laplace (1805) et Gauss (1809). Pour remonter un peu moins loin, afin de résoudre des problèmes sous-déterminés (ou mal-posés), Tikhonov (1963) a introduit l'utilisation d'un terme de régularisation permettant de contraindre certaines propriétés de la solution recherchée. Nous cherchons ici à inverser un problème linéaire par minimisation des moindres carrés, avec un terme de régularisation. L'ouvrage de Tarantola (2005) comprend une description complète et pédagogique de cette méthode. Nous nous inspirons largement de cet ouvrage dans cette section.

Dans la section 7.1, lors de l'utilisation de l'inférence bayésienne, nous avons remarqué le lien existant entre distributions gaussiennes de probabilités et fonction de coût au sens des moindres carrés. La méthode décrite ici est une extension de la méthode précédente, qui minimise une fonction coût analogue au  $\chi^2$ , étendue à chaque point du modèle  $\mathbf{m}$ .

Nous supposons une connaissance à priori du modèle  $\mathbf{m}_{\text{Prior}}$ . Nous supposons également que le modèle recherché est une réalisation issue d'une distribution gaussienne centrée sur  $\mathbf{m}_{\text{prior}}$  et de matrice de covariance  $\mathbf{C}_M$ . La densité de probabilité à priori (i.e. avant les mesures) de la réalisation de  $\mathbf{m}$  vaut :

$$\rho_M(\mathbf{m}) = \text{const.} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{m}-\mathbf{m}_{\text{prior}})^T \mathbf{C}_M^{-1}(\mathbf{m}-\mathbf{m}_{\text{prior}})} \quad (8.5)$$

La constante de normalisation, inutile dans la suite n'est pas explicitée.  $T$  dénote l'opération de transposition et l'on rappelle que  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{m}_{\text{prior}}$  sont des vecteurs colonnes.

De même, nous supposons que les données théoriques  $\mathbf{d}$  générées en présence du modèle recherché  $\mathbf{m}$  sont issues d'une distribution gaussienne centrée sur les observations  $\mathbf{d}_{\text{obs}}$  et de matrice de covariance  $\mathbf{C}_D$ <sup>5</sup>. La densité de probabilité d'obtenir  $\mathbf{d}$  s'écrit alors :

$$\rho_D(\mathbf{d}) = \text{const.} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{d}-\mathbf{d}_{\text{obs}})^T \mathbf{C}_D^{-1}(\mathbf{d}-\mathbf{d}_{\text{obs}})} \quad (8.6)$$

La matrice de covariance  $\mathbf{C}_D$  est une extension de l'erreur de mesure  $\epsilon^2$  introduite au paragraphe 7.1.1 tandis que la matrice de covariance  $\mathbf{C}_M$  correspond à l'écart attendu entre le modèle recherché et le modèle à priori. La construction et l'ajustement de ces matrices est un point clef du fonctionnement de l'inversion qui sera détaillé dans la suite.

En combinant ces deux informations et en se rappelant la relation définissant le problème direct (8.4), on peut montrer que la densité de probabilité à posteriori (après les mesures) de réalisation du modèle  $\mathbf{m}$  vaut :

$$\zeta(\mathbf{m}) = \frac{\rho_M(\mathbf{m})\rho_D(\mathbf{G}\mathbf{m})}{\int_{\mathfrak{M}} \rho_M(\mathbf{m}')\rho_D(\mathbf{G}\mathbf{m}')d\mathbf{m}'} \quad (8.7)$$

où l'intégration au dénominateur se fait sur toutes les réalisations possibles du modèle  $\mathbf{m}$ . En remplaçant les expressions des densités de probabilités définies plus haut, on obtient :

$$\zeta(\mathbf{m}) = \text{const.} e^{-\frac{S(\mathbf{m})}{2}} \quad (8.8)$$

avec  $S(\mathbf{m})$ , la fonction coût ou fonction de désaccord :

$$S(\mathbf{m}) = (\mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{d}_{\text{obs}})^T \mathbf{C}_D^{-1}(\mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{d}_{\text{obs}}) + (\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{Prior}})^T \mathbf{C}_M^{-1}(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{Prior}})$$

---

5. Dans la section 7.1, nous avons utilisé le raisonnement opposé, en supposant que les données observées étaient issues d'une distribution gaussienne centrée sur les données théoriques. Ces deux visions sont en fait équivalentes, si l'une des distributions est gaussienne, le théorème de Bayes permet de démontrer que l'autre l'est aussi.

$$= \|\mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{d}_{\text{obs}}\|_D^2 + \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{Prior}}\|_M^2 \quad (8.9)$$

où les normes  $\|\cdot\|_D^2$  et  $\|\cdot\|_M^2$  sont des normes  $\ell_2$  pondérées par les fonctions poids  $\mathbf{C}_D^{-1}$  et  $\mathbf{C}_M^{-1}$  respectivement. Cette fonction coût est une fonction de  $\chi^2$  généralisée, une version étendue de la fonction introduite dans le cas du changement unique.

La fonction de coût étant quadratique en  $\mathbf{m}$ , la densité de probabilité à posteriori  $\zeta(\mathbf{m})$  est également gaussienne et peut donc s'écrire comme :

$$\zeta(\mathbf{m}) = \text{const.} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{m} - \tilde{\mathbf{m}})^T \tilde{\mathbf{C}}_M^{-1} (\mathbf{m} - \tilde{\mathbf{m}})} \quad (8.10)$$

où la moyenne  $\tilde{\mathbf{m}}$  et la covariance à posteriori  $\tilde{\mathbf{C}}_M$  sont les deux grandeurs que nous cherchons à évaluer ici. On peut montrer que la solution  $\tilde{\mathbf{m}}$  qui minimise la fonction coût  $S(\mathbf{m})$  s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{m}_{\text{prior}} + \left( \mathbf{G}^T \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_M^{-1} \right)^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{C}_D^{-1} (\mathbf{d}_{\text{obs}} - \mathbf{G}\mathbf{m}_{\text{prior}}) \quad (8.11)$$

et sa covariance à posteriori :

$$\tilde{\mathbf{C}}_M = (\mathbf{G}^T \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_M^{-1})^{-1} \quad (8.12)$$

La fonction de coût (8.9) est ici composée de la somme de deux termes, la distance entre le modèle recherché et le modèle connu à priori et la distance entre les données observées et celles théoriquement issues du modèle recherché. Les matrices de covariance  $\mathbf{C}_M$  et  $\mathbf{C}_D$  permettent donc de donner plus ou moins d'importance à chacun de ces deux termes en fonction de la confiance respective accordée au modèle à priori et aux données observées. De plus, les éléments hors-diagonaux de ces matrices permettent d'introduire des corrélations entre données observées ou entre cellules du modèle.

Nous détaillons la construction de ces matrices et l'application de l'algorithme d'inversion en s'appuyant sur les simulations étudiées précédemment (sections 7.2 et 7.4).

### 8.3 Application aux simulations numériques

Revenons pour commencer à la configuration de l'expérience 4 présentée au paragraphe 7.4 pour laquelle l'algorithme du  $\chi^2$  ne donnait pas de solution satisfaisante. Cette inversion vise à localiser trois défauts de tailles et positions distinctes simultanément. Nous conservons les notations actuelles pour la formulation du problème ( $\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m}$ ). On identifie chacun des termes grâce à l'équation (8.2). Le modèle recherché  $\tilde{\mathbf{m}}$  est une carte de section efficace ( $\Sigma$ ), les données observées  $\mathbf{d}_{\text{obs}}$  sont des décorrélatés ( $\mathbf{DC}$ ) et l'opérateur  $\mathbf{G}$  reliant les deux correspond au noyau ( $\frac{c}{2}\mathbf{K}$ ).

Nous commençons par construire les matrices de covariances  $\mathbf{C}_D$  et  $\mathbf{C}_M$ . Les données étant enregistrées entre capteurs suffisamment distants, nous choisissons de négliger leurs corrélations en définissant une matrice  $\mathbf{C}_D$  diagonale. De plus, nous supposons à partir d'observations empiriques une erreur relative (ici d'origine statistique) d'environ 30% sur ces données. Notons que la valeur de l'erreur relative n'a pas d'importance dans l'absolu, seul le poids relatif des matrices  $\mathbf{C}_M$  et  $\mathbf{C}_D$  intervient dans la minimisation du désaccord  $S(\mathbf{m})$ . La matrice  $\mathbf{C}_D$  est alors définie comme :

$$C_{Dij} = 0.3d_{\text{obs}i}\delta_{ij} \quad (8.13)$$

ou  $\delta_{ij}$  représente le symbole de Kronecker et en supposant 30% d'erreur relative sur les données mesurées.

Pour réduire la sous-détermination du problème et contourner la discrétisation arbitraire du modèle  $\mathbf{m}$ , nous définissons en nous inspirant du travail de Froment (2011) une fonction de corrélation exponentielle entre cellules du modèle :

$$C_{Mij} = (\sigma_m \frac{L_0}{L_c})^2 e^{-\frac{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}{L_c}} \quad (8.14)$$

où  $\sigma_m$  correspond à un écart-type attendu par rapport au modèle initial  $\mathbf{m}_{\text{prior}}$ ,  $L_0 = 6\text{mm}$  correspond à la taille linéaire d'une cellule du modèle<sup>6</sup> et  $L_c$  est la distance typique de corrélation entre cellules du modèle.

L'inversion comprend alors deux paramètres libres  $L_c$  et  $\sigma_m$  qu'il convient d'ajuster correctement. Nous suivons pour cela la méthode de la courbe en L (L-curve) décrite par Hansen (1992). Cette méthode permet de sélectionner les paramètres libres en faisant un compromis entre le résidu de l'inversion  $\|\mathbf{d}_{\text{obs}} - \mathbf{G}\tilde{\mathbf{m}}\|$  et un critère  $C_r$  sur le modèle estimé  $\tilde{\mathbf{m}}$ .

N'ayant pas d'information à priori sur les positions des changements attendus, nous commençons par définir un modèle à priori nul  $\mathbf{m}_{\text{prior}} = \mathbf{0}$ . Pour rester dans le cadre de validité de la méthode, nous supposons que le milieu a faiblement varié entre nos deux séries d'acquisitions. Nous définissons donc la norme  $\ell_1$  de l'écart au modèle à priori comme critère  $C_r$ , que nous souhaitons aussi faible que possible :

$$C_r = \sum_i |m_i - m_{\text{prior}_i}| \quad (8.15)$$

Le modèle à priori étant nul, ce critère correspond à la norme  $\ell_1$  du modèle estimé.

Pour tracer la courbe en L, nous commençons par définir une gamme plausible de valeurs pour les paramètres libres  $L_c$  et  $\sigma_m$ . Nous effectuons ensuite autant d'inversions

6. La taille des cellules, de l'ordre de  $\ell^* = 7.5\text{mm}$ , a été choisie comme un compromis entre temps de calcul et résolution espérée.



que de combinaisons possibles de ces paramètres pour lesquelles nous calculons le résidu de l'inversion ainsi que le critère  $C_r$ . La courbe en L est alors constituée d'une représentation paramétrique du résidu en fonction du critère  $C_r$ . Un exemple de courbe en L est donné en Figure 8.8 pour  $L_c = 12\text{mm} \approx 1.5\ell^*$  ( $\sigma_m$  libre).

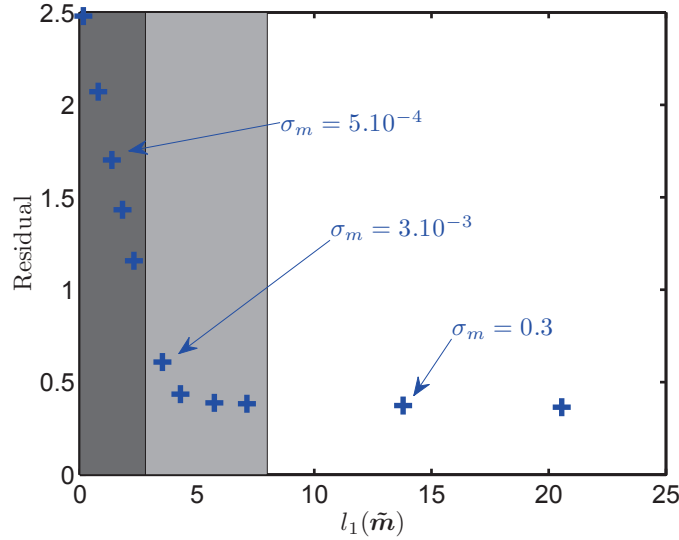


FIGURE 8.8 – Courbe en L obtenue pour une distance de corrélation  $L_c = 12\text{mm}$ . Pour chaque valeur testée de l'écart-type au modèle à priori  $\sigma_m$ , un croix représente la valeur du résidu de l'inversion en fonction de la norme  $\ell_1$  du modèle obtenu. La zone sombre (à gauche) correspond à une zone de grande erreur (résidu élevé) mais de modèle simple (norme  $\ell_1$  faible). La zone claire (à droite) correspond à une zone de faible erreur (résidu faible) mais de modèle complexe (norme  $\ell_1$  élevée). La zone grise (au milieu) correspond au meilleur compromis entre fidélité au modèle à priori et respect des données observées. L'écart-type est donc choisi autour de  $\sigma_m = 3.10^{-3}\text{mm}$ .

En regardant la composition de la fonction coût (8.9), on comprend que l'ajustement de la valeur de  $\sigma_m$  permet de donner plus ou moins de poids à chacun des deux termes. Une valeur élevée de  $\sigma_m$  donne plus d'importance au terme  $\|\mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{d}_{\text{obs}}\|_D^2$  et favorise donc le respect des données observées (résidu faible) au détriment de la fidélité au modèle à priori (norme  $\ell_1$  élevée). Au contraire, une valeur faible de  $\sigma_m$  donne plus d'importance au terme  $\|\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{prior}}\|_M^2$  et favorise donc le respect du modèle à priori (norme  $\ell_1$  faible) au détriment des données observées (résidu élevé).

Le point de courbure maximale de la courbe en L nous permet de sélectionner la valeur du (ou des) paramètres libres en faisant un compromis entre fidélité au modèle à priori et respect des données observées (Figure 8.8).

La matrice de covariance  $\mathbf{C}_M$  est alors construite à partir des paramètres  $\sigma_m = 3.10^{-3}\text{mm}$  et  $L_c = 12\text{mm}$ . L'algorithme d'inversion (8.11) est ensuite appliqué pour obtenir le modèle estimé  $\tilde{\mathbf{m}}$ .

La carte de section efficace  $\tilde{\Sigma} = \tilde{\mathbf{m}}$  obtenue est représentée en Figure 8.9. Cette carte

semble indiquer une localisation des zones de changements mais avec un contraste plutôt faible. De plus, des zones de sections efficaces négatives sont présentes, alors qu'elles n'ont aucun sens physique.

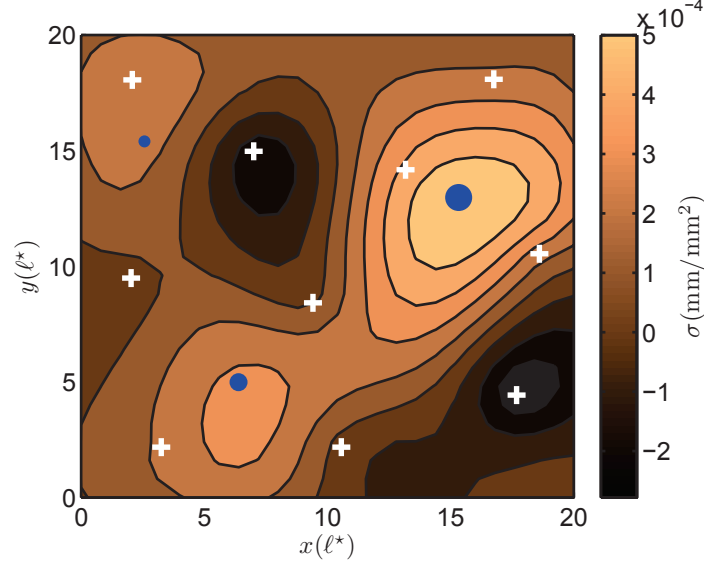


FIGURE 8.9 – Carte de section efficace estimée par inversion linéaire au sens des moindres carrés. Les positions des trois défauts circulaires de rayons  $r_s = \lambda/5, \lambda/3, \lambda/2$  sont repérées par des disques bleus. Les régions comprenant les défauts sont retrouvées mais le contraste est faible. De plus des zones de section efficace négative, donc non physiques, sont présentes.

L'algorithme utilisé ici ne présente pas de contrainte de positivité sur le modèle. Pour pallier à cette inconsistance, nous proposons d'itérer la procédure, en tronquant les zones négatives. Le modèle à priori utilisé à l'itération  $n + 1$  est constitué du modèle estimé obtenu à l'itération  $n$ . La covariance sur le modèle utilisée à l'itération  $n + 1$  correspond également à la covariance à posteriori  $\tilde{\mathbf{C}}_M$  de l'itération  $n$ , calculée grâce à l'équation (8.12).

L'algorithme appliqué s'écrit donc par récurrence :

$$\tilde{\mathbf{m}}^{n+1} = \tilde{\mathbf{m}}_0^n + \left( \mathbf{G}^T \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{G} + \tilde{\mathbf{C}}_M^n \right)^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{C}_D^{-1} (\mathbf{d}_{\text{obs}} - \mathbf{G} \tilde{\mathbf{m}}_0^n) \quad (8.16)$$

où  $\tilde{\mathbf{m}}_0^n$  correspond au modèle estimé à l'itération  $n$  et dont les éléments négatifs ont été ramenés à zéro. Après une dizaine d'itérations, la carte obtenue converge vers le résultat présenté en Figure 8.10, pour lequel les trois défauts sont bien relocalisés tout en respectant la positivité des sections efficaces.

Nous proposons pour finir de tester l'inversion dans une configuration plus réaliste. Comme cela peut être le cas expérimentalement, on suppose que l'on n'a accès qu'à une des faces du milieu étudié. Nous reprenons donc des simulations similaires en plaçant l'ensemble des capteurs sur le bord gauche du milieu. Les Figures 8.11, 8.12 et 8.13

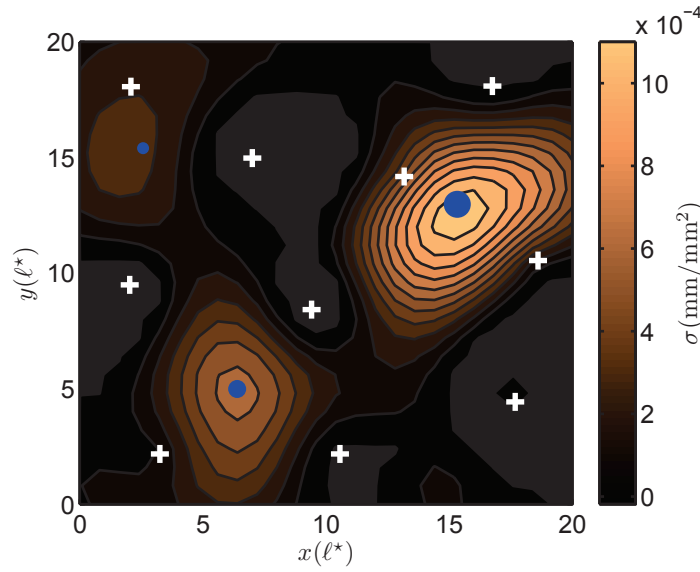


FIGURE 8.10 – Carte de section efficace obtenue après plusieurs itérations de l’inversion des moindres carrés. Les positions des trois défauts circulaires de rayons  $r_s = \lambda/5, \lambda/3, \lambda/2$  sont repérées par des disques bleus. Les défauts sont retrouvés convenablement. Les sections efficaces sont bien positives et semblent s’accorder qualitativement avec la taille des défauts apparus.

représentent les cartes obtenues pour des défauts situés à 6, 11, 16 $\ell^*$  de profondeur respectivement. La Figure 8.14 présente le résultat de l’inversion pour l’apparition simultanée des trois défauts.

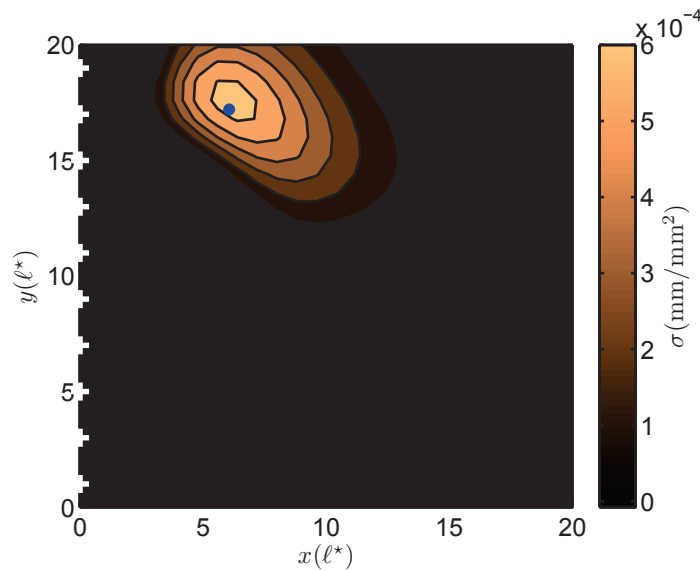


FIGURE 8.11 – Carte de section efficace obtenue après plusieurs itérations de l’inversion des moindres carrés. Les capteurs sont répartis sur un seul bord du milieu (croix blanches). Le défaut, repéré par un disque bleu est un disque de rayon  $r_s = \lambda/5$ .

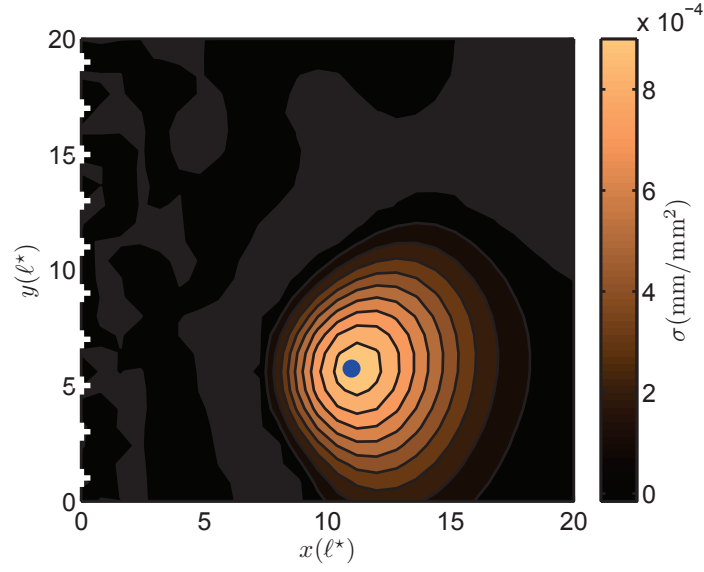


FIGURE 8.12 – Carte de section efficace obtenue après plusieurs itérations de l'inversion des moindres carrés. Les capteurs sont répartis sur un seul bord du milieu (croix blanches). Le défaut, repéré par un disque bleu est un disque de rayon  $r_s = \lambda/3$ .

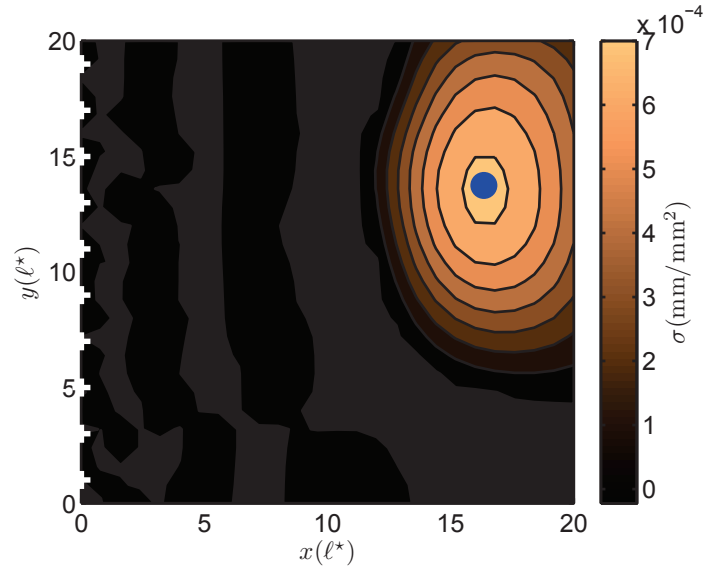


FIGURE 8.13 – Carte de section efficace obtenue après plusieurs itérations de l'inversion des moindres carrés. Les capteurs sont répartis sur un seul bord du milieu (croix blanches). Le défaut, repéré par un disque bleu est un disque de rayon  $r_s = \lambda/2$ .

Dans cette configuration délicate, nous arrivons toujours à localiser les trois défauts pris indépendamment, jusqu'à une profondeur de  $16\ell^*$  pour le plus éloigné. Cependant, lors de l'inversion simultanée des trois défauts, si la méthode semble localiser les deux premiers, le défaut le plus lointain n'est pas retrouvé. Il reste à déterminer si l'échec de cette dernière localisation s'explique seulement par un manque de résolution lié à

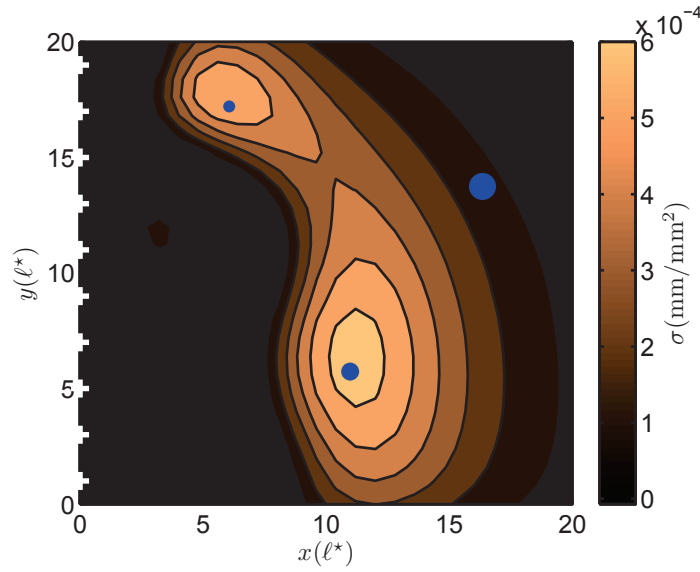


FIGURE 8.14 – Carte de section efficace obtenue après plusieurs itérations de l’inversion des moindres carrés. Les capteurs sont répartis sur un seul bord du milieu (croix blanches). Les défauts, repérés par des disques bleus sont des disques de rayons  $r_s = \lambda/5, \lambda/3$  et  $\lambda/2$ . Les défauts 1 et 2 sont localisés correctement, le défaut 3 n’est pas repéré.

la configuration des capteurs ou si la linéarité de la formulation du problème (section 8.2.1) est à remettre en cause. En effet, le dernier défaut étant situé derrière les deux premiers, il est difficile de supposer que son effet sur la décorrélation puisse être considéré indépendamment des deux autres. Des tests numériques pour effectuer cette vérification sont envisageables.

Pour conclure, cette nouvelle formulation du problème et l’utilisation de cet algorithme d’inversion donnent des résultats prometteurs sur les simulations numériques. Nous avons observé que la localisation de changements locaux multiples est possible lorsque les capteurs sont répartis dans le milieu et, dans une certaine mesure lorsque ceux-ci sont regroupés sur une seule face.

Par construction, cette méthode s’adresse à l’imagerie de changements locaux suffisamment éloignés les uns des autres. Des tests numériques permettraient de définir plus quantitativement les limites de validité de la méthode. En particulier, il serait intéressant de mesurer son pouvoir de séparation ainsi que sa capacité à imager des défauts étendus.

Il serait également intéressant d’appliquer cette méthode aux données issues de l’expérience RL7 présentée en début de chapitre (section 8.1).

# Conclusions et perspectives

Ce travail de thèse a porté sur l'étude de changements locaux en régime de diffusion multiple. Les différents développements théoriques et méthodologiques ont été illustrés à l'aide de simulations numériques d'ondes acoustiques et sismiques ainsi qu'avec des expériences en ultrasons dans des éléments en béton.

En introduisant des défauts locaux dans une éprouvette en béton (matériau très hétérogène), nous avons tout d'abord observé l'apparition de fines variations des formes d'ondes de la coda. Pour quantifier ces variations, nous avons effectué deux types de mesure : des mesures de décorrélation et des mesures de déphasage (ou variation apparente de vitesse). Nous avons supposé que la décorrélation était une mesure adaptée à l'étude d'un changement local de « structure » (fort contraste d'impédance), et que le déphasage était une mesure adaptée à un changement local de « vitesse » (faible contraste d'impédance).

D'une part, nous avons estimé théoriquement ces deux observables pour des changements aux caractéristiques connues. Cet axe de recherche constitue le problème direct.

D'autre part, nous avons adopté le cheminement inverse en essayant d'inférer les caractéristiques du changement à partir des mesures de variation de la coda. Cet axe de recherche constitue le problème inverse.

Les principaux résultats des recherches opérées dans ces deux axes complémentaires sont présentés dans la suite.

## Étude du problème direct :

Dans un premier temps, nous avons dérivé une expression théorique de la décorrélation de la coda induite par un changement local de « structure ». Ce changement peut correspondre en pratique à tout type de forte variation locale des propriétés mécaniques d'un milieu hétérogène.

Dans le cas d'un défaut de section efficace  $\sigma$  suffisamment faible (qualitativement  $\sigma < \lambda$ ), nous avons montré que la décorrélation est proportionnelle à  $\sigma$  et qu'elle s'exprime à l'aide d'un noyau de sensibilité basé sur le transport de l'intensité dans le milieu. Après avoir étudié ce noyau pour différentes solutions du transport (diffusion, transfert

radiatif), nous l'avons confronté à des données issues de simulations numériques en différences finies. Ces simulations ont permis de souligner la nécessité d'utiliser le transfert radiatif dans les deux situations suivantes :

- pour l'expression de la décorrélation aux temps courts dans la coda, quelle que soit la position du défaut.
- pour l'expression de la décorrélation quand le défaut est proche de l'un des capteurs, quel que soit le temps dans la coda<sup>7</sup>.

Nous avons également montré que pour des défauts de section efficace plus importante ( $\sigma \geq \lambda$ ), il est nécessaire d'ajouter des termes correctifs au modèle initial. Ces termes permettent de prendre en compte l'effet des visites récurrentes du défaut.

Nous avons ensuite proposé une méthode « rapide » permettant de construire le noyau dans des géométries complexes ou des situations plus générales que celles étudiées. Cette méthode est basée sur le calcul de l'intensité solution de la diffusion à l'aide de matrices de transfert.

Dans un second temps, nous avons abordé le cas particulier d'un changement local de « vitesse » (faible contraste d'impédance) apparaissant dans le milieu. En appliquant l'approximation de Born pour le défaut, nous avons montré que la décorrélation est négligeable et que l'effet principal de ce changement est un déphasage (ou variation apparente de vitesse) des ondes de la coda. Contrairement à un changement global de vitesse dans le milieu, ce déphasage ne croît pas linéairement avec le temps dans la coda. En utilisant le formalisme appliqué à l'estimation de la décorrélation, nous avons retrouvé un résultat connu (Pacheco et Snieder, 2005), en montrant que ce déphasage s'exprime proportionnellement au noyau de sensibilité étudié précédemment. Contrairement au cas du changement de structure, l'approximation de Born permet ici de généraliser l'expression du déphasage à des défauts spatialement étendus.

Nous avons alors utilisé ce modèle dans le cadre d'une étude de la sensibilité de la coda sismique à un changement de vitesse en profondeur. Ce travail collaboratif (Obermann *et al.*, 2013b), basé sur la combinaison de la sensibilité des ondes de surface et des ondes de volume, a permis de démontrer entre autres les propriétés suivantes :

- un changement de vitesse dans une couche profonde<sup>8</sup> peut être détecté dans la coda grâce aux conversions entre les différents modes de propagation, même lorsque le récepteur et la source sont situés à la surface. Les conversions, et par conséquent la sensibilité, augmentent avec le degré d'hétérogénéité du milieu.
- la variation de vitesse apparente (mesurée dans la coda) est proportionnelle à la variation de vitesse réelle s'opérant dans la couche. La variation apparente peut être modélisée par une combinaison linéaire de la sensibilité des ondes de surface en fonction de la profondeur et du noyau de sensibilité étudié précédemment (pour les ondes de volume).

---

7. La décorrélation est ainsi radicalement différente de l'intensité, qui converge toujours vers la solution de la diffusion aux temps longs.

8. Une couche située au-delà de la sensibilité des ondes de surface.

- en fonction de la dynamique de la variation de vitesse apparente au cours du temps dans la coda, il est possible de discriminer un changement s'opérant en surface d'un changement s'opérant en profondeur.

Dans le cas du changement de vitesse comme dans le cas du changement de structure, nous avons pour l'instant travaillé dans l'approximation des ondes scalaires. Lorsque le milieu élastique est suffisamment hétérogène, les conversions et l'équipartition des modes de propagation permettent d'utiliser une constante de diffusion effective pour le transport de l'intensité et la construction du noyau. Il serait intéressant d'étudier si la construction d'un noyau « élastique » permettrait d'obtenir plus d'informations sur les changements s'opérant dans des milieux modérément hétérogènes.

## Étude du problème inverse

Les fortes dépendances spatiale (position du changement) et temporelle (temps dans la coda) de la décorrélation et de la variation de vitesse apparente permettent d'imager les changements qui en sont la cause.

Dans un premier temps, nous avons développé une méthode d'inversion destinée à localiser un changement local unique. Nous avons choisi de nous concentrer sur la localisation d'un changement de structure (cas général), en utilisant les mesures de décorrélation<sup>9</sup>. Cette méthode, basée sur la minimisation d'une fonction coût (test du  $\chi^2$ ), permet de déterminer la position du défaut sous la forme d'un maximum de vraisemblance. Elle permet également de déterminer la section efficace du défaut.

Nous avons appliqué cette méthode à des simulations numériques ainsi qu'à des expériences en ultrasons dans des éléments en béton. En simulation numérique (2D), nous avons pu localiser l'apparition de diffuseurs mous de différentes tailles et estimer leurs sections efficaces. En comparant ces valeurs estimées aux sections efficaces réelles, nous avons noté que le désaccord grandissait avec la section efficace du défaut. Cet effet s'accorde qualitativement avec le domaine de validité du noyau de sensibilité utilisé ( $\sigma < \lambda$ ). Dans une expérience de laboratoire (3D), nous avons pu localiser un trou millimétrique percé dans un bloc de béton de 600kg. Une première expérience a permis de localiser un trou percé sur la surface supérieure du bloc (seule surface instrumentée) et une deuxième expérience a permis de localiser un trou percé sur la surface inférieure du bloc (à travers 25cm de béton).

Dans le cadre du projet CEOS, nous avons participé à un essai en flexion quatre points d'une poutre en béton armé de 15 tonnes. Nous avons appliqué la méthode du  $\chi^2$  pour tenter de localiser les changements induits par la flexion du bloc. Plusieurs fissures étendues sont apparues simultanément durant l'essai, limitant ainsi le potentiel de la méthode d'inversion initiale. Si nous avons pu récolter des informations intéressantes telles que la détection précoce de fissuration ou l'estimation qualitative de la section efficace des changements, nous n'avons pas pu localiser les fissures.

---

9. Cette méthode peut être facilement adaptée à la localisation d'un changement local de vitesse.



Dans un second temps, nous avons donc reformulé le problème direct pour permettre la prise en compte de plusieurs changements simultanés dans le milieu. La formulation linéaire utilisée est toutefois théoriquement limitée à des changements locaux et suffisamment éloignés les uns des autres. Nous avons ensuite adapté un schéma d'inversion linéaire au sens des moindres carrés pour obtenir une carte de section efficace des défauts apparus. La méthode a été appliquée aux simulations numériques (2D acoustique) pour localiser l'apparition de plusieurs défauts simultanés. Enfin, nous avons également étudié numériquement la possibilité d'imager des défauts lorsque les capteurs sont regroupés sur une seule face du milieu. Dans cette configuration, nous avons pu localiser tour à tour des défauts situés jusqu'à  $15\ell^*$  de la surface instrumentée.

Si ces résultats numériques semblent prometteurs, la question de la capacité à imager des défauts étendus reste ouverte. D'autres tests numériques sont envisageables ainsi qu'un nouveau traitement des données issues de l'expérience CEOS.

À l'échelle des ondes sismiques, un travail collaboratif est en cours pour essayer d'imager des changements pré ou co-éruptifs dans le volcan du Piton de la Fournaise de l'île de La Réunion (Obermann *et al.*, 2013a). Cette étude s'inscrit dans la continuité des travaux de Froment (2011) pour la localisation de changements de vitesse et dans la continuité des travaux présentés ici pour la localisation de changements de structure.

# Bibliographie

- ABRAMOWITZ, M. et STEGUN, I. (1965). *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55. Dover publications.
- ABUBAKIROV, I. et GUSEV, A. (1990). Estimation of scattering properties of lithosphere of kamchatka based on monte-carlo simulation of record envelope of a near earthquake. *Physics of the earth and Planetary Interiors*, 64(1):52–67.
- AKI, K. (1969). Analysis of the seismic coda of local earthquakes as scattered waves. *Journal of geophysical research*, 74(2):615–631.
- AKI, K. et CHOUET, B. (1975). Origin of coda waves : source, attenuation and scattering effects. *J. geophys. Res.*, 80(23):3322–3342.
- AKI, K. et FERRAZZINI, V. (2000). Seismic monitoring and modeling of an active volcano for prediction. *Journal of geophysical research*, 105(B7):16617–16.
- AKKERMANS, E. et MONTAMBAUX, G. (2004). *Physique mésoscopique des électrons et des photons*. EDP sciences.
- ALBADA, M. et LAGENDIJK, A. (1985). Observation of weak localization of light in a random medium. *Physical review letters*, 55(24):2692–2695.
- ANDERSON, D. et SEALS, R. (1981). Pulse velocity as a predictor of 28-and 90-day strength. In *ACI Journal Proceedings*, volume 78. ACI.
- ANDERSON, J. et NERENST, P. (1952). Wave velocity in concrete. In *ACI Journal Proceedings*, volume 48. ACI.
- ANDERSON, P. (1958). Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical review*, 109(5):1492.
- ANUGONDA, P., WIEHN, J. et TURNER, J. (2001). Diffusion of ultrasound in concrete. *Ultrasonics*, 39(6):429–435.
- AUBRY, A. et DERODE, A. (2009). Random matrix theory applied to acoustic backscattering and imaging in complex media. *Physical review letters*, 102(8):84301.
- BECKER, J., JACOBS, L. et QU, J. (2003). Characterization of cement-based materials using diffuse ultrasound. *Journal of engineering mechanics*, 129(12):1478–1484.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- BERTHAUD, Y. (1991). Damage measurements in concrete via an ultrasonic technique. part i experiment. *Cement and concrete research*, 21(1):73–82.
- BRENGUIER, F., CAMPILLO, M., HADZIOANNOU, C., SHAPIRO, N., NADEAU, R. et LAROSE, E. (2008a). Postseismic relaxation along the san andreas fault at parkfield from continuous seismological observations. *Science*, 321(5895):1478–1481.
- BRENGUIER, F., SHAPIRO, N., CAMPILLO, M., FERRAZZINI, V., DUPUTEL, Z., COUTANT, O. et NERCESSIAN, A. (2008b). Towards forecasting volcanic eruptions using seismic noise. *Nature Geoscience*, 1(2):126–130.
- C. WUNDERLICH, E. N. (2011). Evaluation of temperature influence on ultrasound velocity in concrete by coda wave interferometry, in : International symposium on nondestructive testing of materials and structures. *Springer*.
- CAMPILLO, M. et PAUL, A. (2003). Long-range correlations in the diffuse seismic coda. *Science*, 299(5606):547–549.
- CHANDRASEKHAR, S. (1960). *Radiative transfer*. Dover publications.
- COURANT, R., FRIEDRICHS, K. et LEWY, H. (1967). On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal of Research and Development*, 11(2):215–234.
- COWAN, M., JONES, I., PAGE, J. et WEITZ, D. (2002). Diffusing acoustic wave spectroscopy. *Physical Review E*, 65(6):066605.
- COWAN, M., PAGE, J. et WEITZ, D. (2000). Velocity fluctuations in fluidized suspensions probed by ultrasonic correlation spectroscopy. *Physical Review Letters*, 85(2):453–456.
- CRANK, J. (1979). *The Mathematics of Diffusion*. Oxford Science Pub.
- DE ROSNY, J. et ROUX, P. (2001). Multiple scattering in a reflecting cavity : Application to fish counting in a tank. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 109(6): 2587–2597.
- DERODE, A., MAMOU, V. et TOURIN, A. (2006). Influence of correlations between scatterers on the attenuation of the coherent wave in a random medium. *Phys. Rev. E*, 74:036606.
- DERODE, A., ROUX, P. et FINK, M. (1995). Robust acoustic time reversal with high-order multiple scattering. *Physical Review Letters*, 75(23):4206–4209.
- DERODE, A., TOURIN, A. et FINK, M. (2001). Random multiple scattering of ultrasound. i. coherent and ballistic waves. *Physical Review E*, 64(3):036605.
- DUPUTEL, Z., FERRAZZINI, V., BRENGUIER, F., SHAPIRO, N., CAMPILLO, M. et NERCESSIAN, A. (2009). Real time monitoring of relative velocity changes using ambient seismic noise at the piton de la fournaise volcano (la réunion) from january 2006 to june 2007. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 184(1):164–173.

- FENG, S. et SORNETTE, D. (1991). Acoustical nondestructive evaluation of heterogeneous materials in the multiple scattering regime. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 90:1742.
- FOLDY, L. (1945). The multiple scattering of waves. i. general theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers. *Physical Review*, 67(3-4):107.
- FRANKEL, A. et CLAYTON, R. (1986). Finite difference simulations of seismic scattering implications for the propagation of short-period seismic waves in the crust and models of crustal heterogeneity. *Journal of Geophysical Research*, 91:6465–6489.
- FRISCH, U. (1968). Wave propagation in random media. *Probabilistic methods in applied mathematics*, 1:75.
- FROMENT, B. (2011). *Utilisation du bruit sismique ambiant dans le suivi temporel de structures géologiques*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble.
- GRÊT, A., SNIEDER, R., ASTER, R. et KYLE, P. (2005). Monitoring rapid temporal change in a volcano with coda wave interferometry. *Geophysical Research Letters*, 32(6):L06304.
- HADZIOANNOU, C., LAROSE, E., COUTANT, O., ROUX, P. et CAMPILLO, M. (2009). Stability of monitoring weak changes in multiply scattering media with ambient noise correlation : Laboratory experiments. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 125(6):3688–3695.
- HANSEN, P. (1992). Analysis of discrete ill-posed problems by means of the l-curve. *SIAM review*, 34(4):561–580.
- HENNINO, R., TREGOURES, N., SHAPIRO, N., MARGERIN, L., CAMPILLO, M., VAN TIGGELEN, B. et WEAVER, R. (2001). Observation of equipartition of seismic waves. *Physical Review Letters*, 86(15):3447–3450.
- HOLLIGER, K. et LEVANDER, A. (1992). A stochastic view of lower crustal fabric based on evidence from the ivrea zone. *Geophysical Research Letters*, 19(11):1153–1156.
- HU, H., STRYBULEVYCH, A., PAGE, J., SKIPETROV, S. et van TIGGELEN, B. (2008). Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network. *Nature Physics*, 4(12):945–948.
- HULST, H. (1980). *Multiple light scattering : tables, formulas, and applications*. Academic Press.
- KOMATITSCH, D. et VILOTTE, J. (1998). The spectral element method : An efficient tool to simulate the seismic response of 2d and 3d geological structures. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 88(2):368–392.

- KOMLOS, K., POPOVICS, S., NÜRNBERGEROVA, T., BABAL, B. et POPOVICS, J. (1996). Ultrasonic pulse velocity test of concrete properties as specified in various standards. *Cement and Concrete Composites*, 18(5):357–364.
- LAGENDIJK, A. et VAN TIGGELEN, B. (1996). Resonant multiple scattering of light. *Physics Reports*, 270(3):143–215.
- LAROSE, E., CAMPILLO, M., KHAN, A., NAKAMURA, Y. *et al.* (2005a). Lunar subsurface investigated from correlation of seismic noise. *Geophysical Research Letters*, 32.
- LAROSE, E., de ROSNY, J., MARGERIN, L., ANACHE, D., GOUEDARD, P., CAMPILLO, M. et van TIGGELEN, B. (2006). Observation of multiple scattering of khz vibrations in a concrete structure and application to monitoring weak changes. *Physical Review E*, 73(1):016609.
- LAROSE, E., DERODE, A., CLORENNEC, D., MARGERIN, L. et CAMPILLO, M. (2005b). Passive retrieval of rayleigh waves in disordered elastic media. *Physical Review E*, 72(4):046607.
- LAROSE, E., HALL, S. *et al.* (2009). Monitoring stress related velocity variation in concrete with a  $2.10^{-5}$  relative resolution using diffuse ultrasound. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 125(4):1853–1856.
- LAROSE, E., MARGERIN, L., VAN TIGGELEN, B. et CAMPILLO, M. (2004). Weak localization of seismic waves. *Physical review letters*, 93(4):48501.
- LEROY, V. et DERODE, A. (2008). Temperature-dependent diffusing acoustic wave spectroscopy with resonant scatterers. *Phys. Rev. E*, 77:036602.
- LILLAMAND, I., CHAIX, J., PLOIX, M. et GARNIER, V. (2010). Acoustoelastic effect in concrete material under uni-axial compressive loading. *NDT & E International*, 43(8):655–660.
- LLOYD, P. et BERRY, M. (1967). Wave propagation through an assembly of spheres : Iv. relations between different multiple scattering theories. *Proceedings of the Physical Society*, 91(3):678–688.
- LOBKIS, O. et WEAVER, R. (2001). On the emergence of the green s function in the correlations of a diffuse field. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 110: 3011.
- LOBKIS, O. et WEAVER, R. (2003). Coda-wave interferometry in finite solids : Recovery of p-to-s conversion rates in an elastodynamic billiard. *Physical review letters*, 90(25): 254302.
- MAINSANT, G., LAROSE, E., BRÖNNIMANN, C., JONGMANS, D., MICHOD, C. et JABOYEDOFF, M. (2012). Ambient seismic noise monitoring of a clay landslide : Toward failure prediction. *Journal of Geophysical Research*, 117(F1):F01030.

- MARGERIN, L. (2011). Mean-field t-matrix approach to elastic wave scattering by small and point-like objects. *Waves in Random and Complex Media*, 21(4):628–644.
- MASERA, D., BOCCA, P. et GRAZZINI, A. (2011). Coda wave interferometry method applied in structural monitoring to assess damage evolution in masonry and concrete structures. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 305, page 012108. IOP Publishing.
- MCCANN, D. et FORDE, M. (2001). Review of ndt methods in the assessment of concrete and masonry structures. *NDT & E International*, 34(2):71–84.
- MEUNIER, J., HUGUET, F. et MEYNIER, P. (2001). Reservoir monitoring using permanent sources and vertical receiver antennae the céré-la-ronde case study. *The Leading Edge*, 20(6):622–629.
- MICHAELS, J. et MICHAELS, T. (2005). Detection of structural damage from the local temporal coherence of diffuse ultrasonic signals. *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 52(10):1769–1782.
- NAFFA, S., GOUEYGOU, M., PIWAKOWSKI, B., BUYLE-BODIN, F. *et al.* (2002). Detection of chemical damage in concrete using ultrasound. *Ultrasonics*, 40(1-8):247–251.
- NAKATA, N. et SNIEDER, R. (2011). Near-surface weakening in japan after the 2011 tohoku-oki earthquake. *Geophysical Research Letters*, 38(17):L17302.
- NIEUWENHUIZEN, T. et van ROSSUM, M. (1993). Role of a single scatterer in a multiple scattering medium. *Physics Letters A*, 177(1):102–106.
- NIU, F., SILVER, P., DALEY, T., CHENG, X. et MAJER, E. (2008). Preseismic velocity changes observed from active source monitoring at the parkfield safod drill site. *Nature*, 454(7201):204–208.
- NOCEDAL, J. et WRIGHT, S. (1999). *Numerical optimization*. Springer verlag.
- OBERMANN, A., PLANÈS, T., LAROSE, E. et CAMPILLO, M. (2013a). Imaging structural changes on a volcano using ambient seismic noise (subm.). *J. Geophys. Res.*
- OBERMANN, A., PLANÈS, T., LAROSE, E., SENS-SCHÖNFELDER, C. et CAMPILLO, M. (2013b). Depth sensitivity of seismic coda waves to velocity perturbations in an elastic heterogeneous medium. *Geophysical Journal International*, 194(1):372–382.
- PAASSCHENS, J. (1997). Solution of the time-dependent boltzmann equation. *Physical Review E*, 56(1):1135.
- PACHECO, C. et SNIEDER, R. (2005). Time-lapse travel time change of multiply scattered acoustic waves. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 118:1300.



## BIBLIOGRAPHIE

---

- PAYAN, C., GARNIER, V., MOYSAN, J. et JOHNSON, P. (2009). Determination of third order elastic constants in a complex solid applying coda wave interferometry. *Applied Physics Letters*, 94(1):011904–011904.
- PINE, D., WEITZ, D., CHAIKIN, P. et HERBOLZHEIMER, E. (1988). Diffusing wave spectroscopy. *Physical Review Letters*, 60(12):1134–1137.
- POPOVICS, J. et ROSE, J. (1994). A survey of developments in ultrasonic nde of concrete. *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 41(1):140–143.
- POUPINET, G., ELLSWORTH, W. et FRECHET, J. (1984). Monitoring velocity variations in the crust using earthquake doublets : an application to the calaveras fault, california.
- POUPINET, G., RATDOMOPURBO, A. et COUTANT, O. (1996). On the use of earthquake multiplets to study fractures and the temporal evolution of an active volcano. *Annals of Geophysics*, 39(2).
- PRESS, W., TEUKOLSKY, S., VETTERLING, W. et FLANNERY, B. (2007). *Numerical recipes 3rd edition : The art of scientific computing*. Cambridge University Press.
- RIVET, D., CAMPILLO, M., SHAPIRO, N., CRUZ-ATIENZA, V., RADIGUET, M., COTTE, N. et KOSTOGLODOV, V. (2011). Seismic evidence of nonlinear crustal deformation during a large slow slip event in mexico. *Geophysical Research Letters*, 38(8):L08308.
- ROSSETTO, V., MARGERIN, L., PLANÈS, T. et LAROSE, E. (2011). Locating a weak change using diffuse waves : Theoretical approach and inversion procedure. *Journal of Applied Physics*, 109(3):034903–034903.
- SATO, H. (1993). Energy transportation in one- and two-dimensional scattering media : analytic solutions of the multiple isotropic scattering model. *Geophys. J. Int.*, 112:141–146.
- SATO, H. et FEHLER, M. (1998). *Seismic Wave Propagation and Scattering in the Heterogeneous Earth*. Springer-Verlag.
- SAWAZAKI, K., SATO, H., NAKAHARA, H. et NISHIMURA, T. (2009). Time-lapse changes of seismic velocity in the shallow ground caused by strong ground motion shock of the 2000 western-tottori earthquake, japan, as revealed from coda deconvolution analysis. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 99(1):352–366.
- SCHURR, D. (2010). *Monitoring damage in concrete using diffuse ultrasonic coda wave interferometry*. Master Thesis, Georgia Tech. University.
- SCHURR, D., KIM, J., SABRA, K. et JACOBS, L. (2011). Damage detection in concrete using coda wave interferometry. *NDT & E International*, 44(8):728–735.
- SENS-SCHÖNFELDER, C. et LAROSE, E. (2008). Temporal changes in the lunar soil from correlation of diffuse vibrations. *Physical Review E*, 78(4):045601.

- SENS-SCHÖNFELDER, C. et LAROSE, E. (2010). Lunar noise correlation, imaging and monitoring. *Earthquake Science*, 23(5):519–530.
- SENS-SCHÖNFELDER, C. et WEGLER, U. (2006). Passive image interferometry and seasonal variations of seismic velocities at merapi volcano, indonesia. *Geophysical Research Letters*, 33(21):L21302.
- SENS-SCHÖNFELDER, C. et WEGLER, U. (2011). Passive image interferometry for monitoring crustal changes with ambient seismic noise. *Comptes Rendus Geoscience*, 343(8):639–651.
- SHANG, T. et GAO, L. (1988). Transportation theory of multiple scattering and its application to seismic coda waves of impulsive source. *Sci. Sinica*, 31:1503–1514.
- SHENG, P. (2006). *Introduction to wave scattering, localization and mesoscopic phenomena*, volume 88. Springer.
- SHOKOUHI, P., ZOËGA, A. et WIGGENHAUSER, H. (2010). Nondestructive investigation of stress-induced damage in concrete. *Advances in Civil Engineering*, 2010.
- SNIEDER, R. (2006). The theory of coda wave interferometry. *Pure and Applied Geophysics*, 163(2):455–473.
- SNIEDER, R., GRÊT, A., DOUMA, H. et SCALES, J. (2002). Coda wave interferometry for estimating nonlinear behavior in seismic velocity. *Science*, 295(5563):2253–2255.
- SNIEDER, R. et HAGERTY, M. (2004). Monitoring change in volcanic interiors using coda wave interferometry : Application to arenal volcano, costa rica. *Geophysical research letters*, 31(9):L09608.
- STÄHLER, S., SENS-SCHÖNFELDER, C. et NIEDERLEITHINGER, E. (2011). Monitoring stress changes in a concrete bridge with coda wave interferometry. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 129:1945.
- TARANTOLA, A. (2005). *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. Society for Industrial Mathematics.
- TARANTOLA, A. et VALETTE, B. (1982). Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion. *Rev. Geophys. Space Phys*, 20(2):219–232.
- TATARSKIÏ, V. (1961). *Wave propagation in a turbulent medium*. McGraw-Hill.
- TIKHONOV, A. (1963). Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. *Soviet Math. Dokl.*, 5:1035.
- TOURIN, A. (1999). *Diffusion multiple et renversement du temps des ondes ultrasonores*. Thèse de doctorat, Université D. Diderot, Paris-7.



- TROMP, J., KOMATTISCH, D. et LIU, Q. (2008). Spectral-element and adjoint methods in seismology. *Communications in Computational Physics*, 3(1):1–32.
- TURNER, J. (1998). Scattering and diffusion of seismic waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 88(1):276–283.
- van ROSSUM, M. et NIEUWENHUIZEN, T. (1999). Multiple scattering of classical waves : microscopy, mesoscopy, and diffusion. *Reviews of Modern Physics*, 71(1):313.
- VANNESTE, C., FENG, S. et SORNETTE, D. (1993). Nondestructive evaluations in multiple scattering media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 93(4):2311–2312.
- WATERMAN, P. et TRUELL, R. (1961). Multiple scattering of waves. *Journal of Mathematical Physics*, 2:512.
- WEAVER, R. (1982). On diffuse waves in solid media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 71:1608.
- WEAVER, R. (1985). Diffuse elastic waves at a free surface. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 78:131.
- ZHANG, Y., ABRAHAM, O., GRONDIN, F., LOUKILI, A., TOURNAT, V., LE DUFF, A., LASCOUP, B. et DURAND, O. (2012a). Study of stress-induced velocity variation in concrete under direct tensile force and monitoring of the damage level by using thermally-compensated coda wave interferometry. *Ultrasonics*, 52:1038–1045.
- ZHANG, Y., ABRAHAM, O., GRONDIN, F., LOUKILI, A., TOURNAT, V., LE DUFF, A., LASCOUP, B. et DURAND, O. (2012b). Validation of a thermal bias control technique for coda wave interferometry (cwi) (in press). *Ultrasonics*.
- ZHANG, Y., ABRAHAM, O., LAROSE, E., PLANES, T., LE DUFF, A., LASCOUP, B., TOURNAT, V., EL GUERJOURA, R., COTTINEAU, L.-M. et DURAND, O. (2011). Following stress level modification of real size concrete structure with coda wave interferometry (cwi). *AIP Conf. Proc.*, 1335:1291–1298.

# Annexe A

## Propriétés utiles et intégrales de boucles

### A.1 Propriétés utiles

#### Conventions

Les conventions suivantes sont adoptées dans le manuscrit :

- Transformée de Fourier temporelle : Soit  $f(t)$  une fonction du temps  $t$ , on définit :

$$TF_t[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t} dt$$

et

$$f(t) = TF_{\omega}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \quad (\text{A.1})$$

- Transformée de Fourier spatiale : Soit  $F(\mathbf{R})$  une fonction du vecteur distance  $\mathbf{R}$ , on définit :

$$TF_{\mathbf{R}}[F(\mathbf{R})] = \hat{F}(\mathbf{k}) = \int F(\mathbf{R})e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} d\mathbf{R}$$

et

$$F(\mathbf{R}) = TF_{\mathbf{k}}^{-1}[\hat{F}(\mathbf{k})] = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \hat{F}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} d\mathbf{k} \quad (\text{A.2})$$

avec  $d$  la dimension de l'espace. On note que les conventions de signes sont opposées.

#### Propriétés

- Convolution et transformée de Fourier : Soient  $f(t)$  et  $g(t)$  deux fonctions du temps  $t$ , leur produit de convolution s'écrit :

$$(f \otimes g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau \quad (\text{A.3})$$

La transformée de Fourier de ce produit s'écrit comme le produit des transformées :

$$TF_t[f \otimes g] = TF_t[f(t)]TF_t[g(t)] \quad (\text{A.4})$$

- Fonction de Green : Soit  $G(x)$  la fonction de Green solution de l'équation :

$$\mathfrak{D}G(x) = \delta(x) \quad (\text{A.5})$$

où  $\mathfrak{D}$  est un opérateur différentiel linéaire. Alors la solution générale  $\phi(x)$  de l'équation :

$$\mathfrak{D}\phi(x) = j(x) \quad (\text{A.6})$$

s'écrit comme le produit de convolution :

$$\phi(x) = \phi_0(x) + (G \otimes j)(x) = \phi_0(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - x')j(x')dx' \quad (\text{A.7})$$

où  $\phi_0(x)$  est la solution de l'équation homogène.

- Passage d'une intégrale sur  $\mathbf{r}$  à une intégrale sur  $\mathbf{k}$  :  
Soit  $A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  et  $B(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  deux fonctions ne dépendant que de la distance  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  entre les deux variables. Alors l'intégrale :

$$I = \int A(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}')d\mathbf{r}_1 \quad (\text{A.8})$$

peut se réécrire dans l'espace des  $\mathbf{k}$  :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int \int \int \hat{A}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)} \hat{B}(\mathbf{k}')e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}')} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int \int \hat{A}(\mathbf{k})\hat{B}(\mathbf{k}') \int e^{-i\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')} d\mathbf{r}_1 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int \int \hat{A}(\mathbf{k})\hat{B}(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{k} d\mathbf{k}' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int \hat{A}(\mathbf{k})\hat{B}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

en particulier, pour  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ , on trouve :

$$I = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \hat{A}(\mathbf{k}) \hat{B}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (\text{A.10})$$

De manière similaire, on peut étendre le calcul aux intégrales :

$$\begin{aligned} I &= \int A_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) A_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \dots A_n(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_{n-1} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int A_1(\mathbf{k}) A_2(\mathbf{k}) \dots A_n(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Le calcul de ces intégrales dans le cas des fonctions de Green du milieu effectif est détaillé dans le paragraphe suivant.

## A.2 Intégrales de boucles

Nous suivons l'approche de van Rossum et Nieuwenhuizen (1999)<sup>1</sup> pour le calcul des « intégrales de boucle » dans le cas 3D et nous effectuons le calcul à 2D de manière similaire. Ces intégrales, qui interviennent à de nombreuses reprises dans le manuscrit, sont définies par :

$$I_{a,b} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \hat{G}^a(\mathbf{k}) \hat{G}^{*b}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (\text{A.12})$$

avec  $d$  la dimension de l'espace et où  $\hat{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{k_0^2 - n\mathbf{k}^2}$  dénote la fonction de Green moyenne du milieu effectif étudié à la section 3.2.3 (3.64). En posant  $\mu^2 = k_0^2 - n\mathbf{k}^2$ , on peut écrire :

$$I_{a,b} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{1}{(\mu^2 - k^2)^a (\mu^{*2} - k^2)^b} d\mathbf{k} \quad (\text{A.13})$$

et on trouve les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned} I_{a+1,b} &= \frac{-1}{2a\mu} \frac{d}{d\mu} I_{a,b} \text{ et} \\ I_{a,b+1} &= \frac{-1}{2b\mu^*} \frac{d}{d\mu^*} I_{a,b} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Il convient alors de calculer l'intégrale la plus simple  $I_{1,1}$  et les autres peuvent se déduire des relations de récurrence (A.14). L'intégrale  $I_{1,1}$  s'écrit :

1. Ces calculs se trouvent en annexe de la review. Nous utilisons ici des conventions différentes.

$$I_{1,1} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{1}{(\mu^2 - k^2)(\mu^{*2} - k^2)} d\mathbf{k} \quad (\text{A.15})$$

et dépend donc de la dimension  $d$  du milieu étudié.

### Cas 3D :

En dimension 3, en remarquant que l'intégrande est une fonction radiale paire, le passage en coordonnées sphériques donne :

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} \frac{k^2}{(\mu^2 - k^2)(\mu^{*2} - k^2)} dk \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^2}{(\mu^2 - k^2)(\mu^{*2} - k^2)} dk \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

L'intégrande possède 4 pôles simples en  $\mu$ ,  $-\mu$ ,  $\mu^*$  et  $-\mu^*$ . Dans l'approximation des milieux dilués on peut écrire au premier ordre en  $\frac{1}{k_0\ell}$  (3.66) :

$$\mu \simeq k_0 - \frac{n\Re(\mathbf{t})}{2k_0} + \frac{i}{2\ell} \quad (\text{A.17})$$

où  $\mathbf{t}$  représente la matrice  $\mathbf{T}$  des diffuseurs du milieu et  $\ell$  est le libre parcours moyen de diffusion. On peut alors utiliser le théorème des résidus en intégrant dans le plan complexe supérieur pour trouver :

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \frac{i}{4\pi(\mu - \mu^*)} \quad (3\text{D}) \\ &= \frac{\ell}{4\pi} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Pour calculer  $I_{2,1}$ , on utilise la relation de récurrence (A.14) pour trouver :

$$\begin{aligned} I_{2,1} &= \frac{-1}{2\mu} \frac{-i}{4\pi(\mu - \mu^*)^2} \quad (3\text{D}) \\ &\simeq \frac{-il^2}{8\pi k_0} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

en supposant que le nombre d'onde  $k_{\text{eff}} = \mu$  associé au milieu effectif diffère peu du nombre d'onde associé au milieu uniforme  $k_0$ .

## Cas 2D

En dimension 2, l'intégrale  $I_{1,1}$  se calcule en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{k}{(\mu^2 - k^2)(\mu^{*2} - k^2)} dk \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)} \int_0^{+\infty} \frac{k}{(\mu^2 - k^2)(\mu^{*2} - k^2)} dk \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Ici, l'intégrale étant impaire, on ne peut pas l'étendre à tout l'axe réel. En effectuant le changement de variable  $p = k^2$ , on obtient :

$$I_{1,1} = \frac{1}{(4\pi)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(p - \mu^2)(p - \mu^{*2})} dp \quad (\text{A.21})$$

Puis, en décomposant l'intégrande en éléments simples, on trouve :

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \frac{1}{(4\pi)} \frac{1}{\mu^2 - \mu^{*2}} \left( \int_0^{+\infty} \frac{1}{p - \mu^2} dp - \int_0^{+\infty} \frac{1}{p - \mu^{*2}} dp \right) \\ &= \frac{1}{(4\pi)} \frac{1}{\mu^2 - \mu^{*2}} \left[ \ln(p - \mu^2) - \ln(p - \mu^{*2}) \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{(4\pi)} \frac{\ln(-\mu^{*2}) - \ln(-\mu^2)}{\mu^2 - \mu^{*2}} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

En posant  $-\mu^{*2} = Re^{i\theta}$  et grâce à  $|\Im(\mu^2)| << |\Re(\mu^2)|$  (milieu dilué), on peut approximer  $\theta \simeq \pi \cdot \text{sgn}(k_0)$  et donc :

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \frac{i \cdot \text{sgn}(k_0)}{2(\mu^2 - \mu^{*2})} \\ &= \frac{\ell}{4|k_0|} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

puis en utilisant (A.14) :

$$\begin{aligned} I_{2,1} &= \frac{i}{2(\mu^2 - \mu^{*2})^2} \\ &= \frac{-i\ell^2}{8k_0|k_0|} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$